Extension d'une valuation de rang 1,
centrée en un anneau local, au complété formel.

par Raphaël Astier.

Cadre général :

Soient $(R, \mathcal{M}, k)$ un anneau local nœthérien intègre, de corps de fractions K, et $\nu : K \to \Gamma \cup \{+\infty\}$ une valuation centrée en R, i.e. : $R \subset R_\nu$, $\mathcal{M}_\nu \cap R = \mathcal{M}$ et $K = \text{Frac}(R)$
i.e. : R_ν domine birationnellement R
(il existe de telles valuations, cf. par exemple [M], th.10.2 p.72).

On suppose ν de rang 1, i.e. :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{le nombre de sous groupes isolés de } \Gamma \\ (\Gamma \text{ groupe des valeurs de } \nu) \quad \text{est } 1\end{array}\right\} \begin{array}{l} \iff \dim(R_\nu) = 1 \\ \iff \Gamma \text{ sous-groupe de } (\mathbb{R}, +) \qquad \text{(via isom. croissant)} \\ \iff \Gamma \text{ groupe (additif) archimédien.} \end{array}$$

(cf. [Z.S.] p.45).

Soit : $\Phi = \nu(R \backslash \{0\}) \subset \Gamma_+$ $\qquad \left(\begin{array}{c}\text{Notons que } \Gamma \text{ est le groupe symétrisé de } \Phi \\ \text{car } \nu \text{ est surjective et } K = \text{Frac}(R)\end{array}\right).$

On pose pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $P_\alpha = \{x \in R \mid \nu(x) \geqslant \alpha\}$, ce qui définit bien sûr un idéal de R.

Φ est un ensemble bien ordonné (pour l'ordre induit par celui de Γ). En effet, il suffit de vérifier qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante dans Φ : si c'était le cas pour $(\alpha)_n$, on aurait $\left(P_{\alpha_n}\right)$ suite strictement croissante d'idéaux de R, or R est supposé nœthérien.
De plus Γ étant sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, Φ est sous-monoïde de $(\mathbb{R}, +)$.
On a bien sûr :

$$\begin{aligned} \Phi = \{0\} &\iff \nu \text{ triviale} \\ &\iff R_\nu \text{ corps} \\ &\iff \Gamma = \{0\} \\ &\iff \text{rg}\Gamma = 0, \end{aligned}$$

ce qui n'est donc pas le cas ici, car ν de rang 1 (notamment R ne peut pas être un corps).
On en déduit : Φ et Γ cofinaux dans $\mathbb{R}$, (i.e. non majorés dans $\mathbb{R}$), en particulier infinis. En effet soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche $\beta \in \Phi$ $(\subset \Gamma)$ tel que $\beta \geqslant \alpha$. Soit $x \in R \setminus \{0\}$ tel que : $\nu(x) > 0$ $\big(\Phi \neq \{0\}$ et $\Phi \subset \Gamma_+$: ν centrée en $R\big)$. Comme Γ archimédien, on a $s \in \mathbb{N}$ tel que : $s\nu(x) > \alpha$, et donc $\beta = s\nu(x) = \nu(x^s) \in \Phi$ convient.

On appelle idéal de la valuation ν, ou ν-idéal, un idéal J de R tel qu'il existe J_ν idéal de R_ν et : $J = J_\nu \cap R$ ([Z.S.], appendice 3, p.340).
Soit I un idéal de R. On a les équivalences évidentes suivantes :

$$\begin{aligned} I \text{ est un } \nu\text{-idéal} &\iff \Big(\forall\, a, b \in R\ ,\ a \in I \ \text{ et } \ \nu(b) \geqslant \nu(a) \ \Rightarrow \ b \in I\Big) \\ &\iff IR_\nu \cap R = I \\ &\iff I = P_\alpha \ \text{ avec } \ \alpha \in \Phi\ ,\ \alpha = \min\{\nu(x) \mid x \in I\} \\ &\iff I = P_\alpha \ \text{ avec } \ \alpha \in \Phi. \end{aligned}$$

Donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, P_α est un ν idéal, (si $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \Phi$, $P_\alpha = P_{\min\{\beta \in \Phi | \beta > \alpha\}}$, évident).

De même on définit pour tout $\alpha \in \Phi$ (ou même tout $\alpha \in \mathbb{R}$), le plus grand ν-idéal strictement contenu dans P_α, noté : P_α^+, c'est :

$$P_{\min\{\beta \in \Phi \ | \ \beta > \alpha\}} = \{x \in R \mid \nu(x) > \alpha\}.$$

Par ailleurs comme R_ν est l'anneau de la valuation ν, ses idéaux sont totalement ordonnés par inclusion ([A], exercice 28 p.73, ou [Z.S.] chap.8), il en est donc de même des idéaux de valuation de R, ils forment une chaîne strictement décroissante :

$P_{\alpha_0} = P_0 = R \supsetneq P_{\alpha_1} = P_0^+ = \mathcal{M} \supsetneq P_{\alpha_2} \supsetneq P_{\alpha_3} \supsetneq \dots P_{\alpha_n} \supsetneq \dots$

avec (α_n) suite des éléments de Φ ordonnés en croissant. $(*)$

Maintenant on considère le complété $\mathcal{M}$-adique de R, noté $\widehat{R}$, comme R est local nœthérien, c'est un complété métrique (on a la distance $\mathcal{M}$-adique : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^n = (0)$), et le morphisme (continu) de R-algèbres $j : R \hookrightarrow \widehat{R}$, est fidèlement plat ([M], th.8.14 p.62).

Pour tout morphisme d'anneaux $\varphi \ : \ A \longrightarrow B$ on note :
$A \cap J = \varphi^{-1}(J)$ l'image réciproque de J idéal de B,
$IB = \mathrm{Id}_B\,\varphi(I) = \varphi(I)B$ l'idéal engendré dans B par l'image de I idéal de A.

On a notamment pour I idéal de R :
$I\widehat{R} = \overline{I}$, adhérence de I pour la topologie de $\widehat{R}$ ([Z.S.], cor.2, th.5 p.257),
et aussi : $I\widehat{R} = \widehat{I}$, complété du R-module I ([A], prop.10.15 p.109).

Pour étendre ν à $\widehat{R}$ deux obstacles se présentent naturellement : d'une part $\widehat{R}$ n'est pas forcément intègre (par exemple si R est l'anneau de coordonnées de la cubique plane nodale : $y^2 = x^2(x+1)$, cf. [E] p.185) ; d'autre part il existerait des éléments de $\widehat{R}$, non nuls, qui auraient une valuation infinie (ceux de H, défini ci-après).

Le principal objet étudié et utilisé ici est l'idéal de $\widehat{R}$:

$$H = \bigcap_{\beta\in\phi} P_\beta \widehat{R}\ ,$$

appelé idéal implicite de $\widehat{R}$ uniquement déterminé par ν.

Exemple 1 : (H peut être non nul).

Soit $R = k[u,v]_{(u,v)}$ (k corps quelconque, et u, v indéterminées).
Alors : $\widehat{R} = k[[u,v]]$, car pour tout anneau A de maximal $\mathcal{M}$, le complété $\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}-$adique de $A_{\mathcal{M}}$ est le complété $\mathcal{M}$-adique de A (cf. [E] p.181).
De plus ici : $k = R/\mathcal{M} \simeq \widehat{R}/\mathcal{M}\widehat{R}$, est le corps résiduel de R et de $\widehat{R}$
(en notant encore $\mathcal{M}$ pour (u,v) le maximal de R).

Soit $w = u - \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i v^i \in \hat{R}$; les $c_i \in k^*$.

On suppose $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i v^i$ transcendant sur $k[v]$ (c'est le cas par exemple pour : $\exp(v)-1$, transcendante sur $\mathbb{C}[v]$). On considère alors le morphisme de k-algèbres $\tau : k[u,v] \hookrightarrow k[[t]]$ défini par :

$$\tau(u) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i t^i$$
$$\tau(v) = t$$

$(*)$ En fait Γ (donc aussi Φ), est dénombrable : Γ sans torsion $\Longleftrightarrow$ Γ est $\mathbb{Z}$-plat (car $\mathbb{Z}$ est principal) donc Γ s'injecte dans $\Gamma \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$ qui est un $\mathbb{Q}$-ev. de dim. finie car on a l'inégalité d'Abhyankar ; degtrν+rgratν $\leqslant$dim$R$ ($\leqslant$+∞), où rgratν=$\dim_{\mathbb{Q}} \Gamma \underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}$ est le rang rationnel de ν et où degtrν est le degré de transcendance de $R_\nu/\mathcal{M}_\nu$ sur $R/\mathcal{M}$ ([Z.S.], appendice 2, p.331).

τ est injectif : si $\tau(P(u,v))=0$, où $P(u,v)=\sum_{\{\text{finie sur } p,q\}} a_{p,q}u^pv^q \in k[u,v]$, c'est que :

$\sum_{\{\text{finie sur } p,q\}} a_{p,q}(\sum_{i\geqslant 1} c_it_i)^pt^q=0$, d'où puisque $\sum_{i\geqslant 1} c_it^i$ transcendant sur $k[t]$, tous les $a_{p,q}$ sont nuls, i.e. : $P(u,v)=0$.

τ est continu avec $k[u,v]$ muni de la topologie (u,v)-adique et $k[[t]]$ muni de la topologie (t)-adique. En effet, il suffit de vérifier que : $\tau((u,v))\subset(t)$, et c'est bien sûr le cas.
On sait alors qu'on a un unique prolongement au complété,

$\tau_2 : k[[u,v]]\to k[[t]]$, avec τ_2 continu.

Mais on a aussi alors un unique prolongement τ_1 au localisé $k[u,v]_{(u,v)}$ car si $P\in k[u,v]\backslash(u,v)$ c'est que P a son terme constant non nul, et donc P inversible dans $k[[u,v]]$: $PQ=1$ où $Q\in k[[u,v]]$, d'où $\tau_2(P)\tau_2(Q)=1$ soit $\tau(P)\tau_2(Q)=1$ car τ_2 prolonge τ, donc $\tau(P)$ inversible dans $k[[t]]$. τ_2 est un prolongement de τ_1, et τ_1 est injectif, bien sûr. De plus τ_1 est local : $\tau_1(u,v)\subset(t)$. Enfin on a un prolongement (unique) de τ_1 aux corps des fractions de $k[u,v]_{(u,v)}$ et $k[[t]]$:

τ_1 : $k(u,v)\longrightarrow k((t))$ (car τ_1 est injectif).

On a donc le diagramme (commutatif) suivant :

$$\begin{tikzcd}
k[u,v] \arrow[r, hook, "\tau"] \arrow[d] & k[[t]] \arrow[d, "\wr"'] \\
k[u,v]_{(u,v)} \arrow[r, hook, "\tau_1"] \arrow[d] & k[[t]] \arrow[d] \\
k(u,v) \arrow[r, hook, "\tau_1"] & k((t))
\end{tikzcd}$$

Pour $P/Q\in k(u,v)$, $P/Q\neq 0$, on pose : $\nu(P/Q)=v_t(\tau_1(P/Q))$,
où v_t est la valuation (t)-adique de $k((t))$, $\big($d'anneau de valuation $k[[t]]\big)$.
Ainsi ν est la restriction de v_t à $k(u,v)$ (car τ_1 injectif), ce qui fait donc de ν une valuation de $k(u,v)$, triviale sur k, centrée en $k[u,v]_{(u,v)}$, de groupe de valeurs $\Gamma=\mathbb{Z}$ (Γ est sous groupe de $\mathbb{Z}$ et $1=\nu(v)$), donc de rang 1. Notons que : $\Phi=\nu(R\backslash\{0\})=\mathbb{N}$, et que si $S\in k[u,v]\setminus(u,v)$, on a $\nu(S)=0$ (par définition de la valuation (t)-adique de $k((t))$).

On a dans cet exemple : $H=(w)$ et pour $\beta\geqslant 2$, $P_\beta=(v^\beta, u-\sum_{i=1}^{\beta-1}c_iv^i)$.

Vérification : $v^\beta\in P_\beta$, $u-\sum_{i=1}^{\beta-1}c_iv^i\in P_\beta$, évident . Réciproquement soit $z\in P_\beta$, $z=P/S$ avec $P\in k[u,v]$, $S\in k[u,v]\backslash(u,v)$ et $\nu(P/S)\geqslant\beta$. On a : $\nu(P)-\nu(S)\geqslant\beta\Leftrightarrow\nu(P)\geqslant\beta$ $(\nu(S)=0)$.
Soit $w_f=u-\sum_{i=1}^{\beta-1}c_iv^i\in A[u]$, unitaire, où $A=k[v]$.
$P\in A[u]$, donc on a la division euclidienne de P par w_f : $P=(w_f)Q(u)+T(u)$
avec $\deg T(u)<1\Rightarrow T\in A=k[v]$.
Alors : $\tau(P)=\tau(w_f)\tau(Q)+\tau(T)$, mais : $\nu(w_f.Q)=\nu(w_f)+\nu(Q)\geqslant\nu(w_f)$, car ν centrée aussi en $k[u,v]$. Et : $\nu(w_f)=v_t(\tau(w_f))$, avec $\tau(w_f)=\sum_{i\geqslant\beta}c_it^i$ et $c_\beta\neq 0$, donc $\nu(w_f)=\beta$. De plus en

écrivant $T = \sum_{i=\alpha}^{n} a_i v^i$ où $\alpha \in \mathbb{N}$ est le plus petit entier tel que $a_\alpha \neq 0$, on a : $\nu(T) = \alpha$, donc si $\alpha \leqslant \beta$ alors $\nu(P) = v_t(\tau(P)) = \min\{.,.\} = \alpha$, contraire à : $\nu(P) \geqslant \beta$. Donc $\alpha \geqslant \beta$ et $T = v^\beta . T'$ comme désiré.

Maintenant il reste à voir : $H = (w)$.
On a : $P_\beta \widehat{R} = (v^\beta, w_f)$ dans $\widehat{R}$ pour $\beta \geqslant 2$ et bien sûr w est dans tous ces $P_\beta \widehat{R}$.
Réciproquement comme on a : $(0) \subsetneq (w) \subset H \subset \widehat{R}$ et $\widehat{R} = k[[u,v]]$ de dimension 2, avec comme on le verra plus loin H premier, il suffit de vérifier que w est irréductible dans $\widehat{R}$ (factoriel) et que $H \neq \mathcal{M}\widehat{R}$, on aura alors : (w) premier de $\widehat{R}$, et $\mathrm{ht}(H) \leqslant 1$, d'où : $(w) = H$.

• Irréductibilité de w :

. w n'est ni nul, ni inversible. (les inversibles de $k[[u,v]]$ sont les séries formelles à terme constant non nul).

. Supposons $w = fg$ avec f et g dans $\widehat{R}$ non inversibles.

$f = \sum_{p,q \geqslant 1} a_{p,q} u^p v^q$, $g = \sum_{p,q \geqslant 1} b_{p,q} u^p v^q$ i.e. avec : $\mu(f) \geqslant 1$ et $\mu(g) \geqslant 1$,
où μ est la valuation (u,v)-adique de $k[[u,v]]$.

Alors : $\mu(w) = \mu(fg) = \mu(f) + \mu(g) \geqslant 2$ or $\mu(w) = 1$, impossible, donc f ou g inversible, cqfd.

Notons que w est un paramètre de $\widehat{R}$ i.e. : (u,w) système régulier de paramètres de $\widehat{R}$. En effet on vérifie que : $(\overline{u}, \overline{w})$ (formes initiales de u et w) constituent un système libre du k-espace vectoriel $(u,v)/(u,v)^2$ (de dimension 2 : $\widehat{R}$ régulier comme R de même dimension que R).

• $H \neq \mathcal{M}\widehat{R}$ avec $\mathcal{M} = (u,v)$ maximal de $R = k[u,v]$:

Comme $\nu(v) = 1$ on a : $v \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}\widehat{R}$ (ici $\mathcal{M} = P_1$), mais $v \notin P_2\widehat{R}$ sinon : $v \in P_2\widehat{R} \bigcap R = P_2$ (fidèle platitude de $\widehat{R}$ sur R), et $\nu(v) \geqslant 2$, exclu, donc $v \notin H = \bigcap_{\beta \in \mathbb{N}} P_\beta \widehat{R}$.

On revient aux notations générales. On va maintenant montrer que H est un idéal premier de $\widehat{R}$, et définir une valuation sur $\mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)$, prolongeant ν, et centrée en $\widehat{R}/H$. On va aussi montrer que cette valuation est l'unique valuation de $\mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)$ prolongeant ν et centrée en $\widehat{R}/H$.

<u>Lemme 1</u> : Soit $\beta \in \Phi$. On a que P_β est un idéal $\mathcal{M}$-primaire de R, i.e. : $\sqrt{P_\beta} = \mathcal{M}$, soit : $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}^s \subset P_\beta$, ce qui équivaut aussi à dire : R/P_β est un R-module de longueur finie, ou encore : R/P_β est un anneau artinien.

<u>démonstration</u> :

D'abord : $\sqrt{P_\beta} = \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists\ s \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}^s \subset P_\beta$, est trivial car : $\sqrt{\mathcal{M}^s} = \mathcal{M}$.
Soit $\delta = \min\{\alpha \in \Phi \backslash \{0\}\}$, comme Γ est archimédien, $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tel que $s\delta \geqslant \beta$, d'où : $\mathcal{M}^s \subset P_\beta$, (en effet si $u = \sum_i x_{1,i} \dots x_{s,i} \in \mathcal{M}^s$, u non nul, alors $\nu(u) \geqslant \min_i\{\nu(x_{1,i}) + \cdots + \nu(x_{s,i})\}$ avec les $\nu(x_{k,i}) \geqslant \delta$, donc $\nu(u) \geqslant \min_i\{s\delta\} = s\delta \geqslant \beta$ et $u \in P_\beta$). On en déduit un morphisme (de R-algèbres) surjectif : $R/\mathcal{M}^s \twoheadrightarrow R/P_\beta$, et on sait alors que : $\lg(R/P_\beta) \leqslant \lg(R/\mathcal{M}^s)$, cette dernière étant finie (égale à : $\sum_{i=0}^{s-1} \lg(\mathcal{M}^i/\mathcal{M}^{i+1})$, avec R nœthérien).
Enfin : R/P_β artinien $\Rightarrow \exists\ s \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}^s \subset P_\beta$, est un résultat classique, ([Z.S.], p.284).

Remarque : $\Phi \cup \{+\infty\} = \overline{\Phi}$ est une partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et la limite éventuelle d'une suite d'éléments de $\Phi \cup \{+\infty\}$ est bien définie (c'est la limite pour la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$).
De plus : $+\infty$ est point d'accumulation de Φ dans $\overline{\mathbb{R}}$ car : $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $\Phi \cap [a, +\infty] \neq \emptyset$, ($\Phi$ non majoré dans $\mathbb{R}$), et $+\infty \notin \Phi$.

Lemme 2 : Soit (α_n) une suite strictement croissante d'éléments de Φ.
Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$ i.e. (α_n) non majorée dans $\mathbb{R}$.

---

démonstration :

Si (α_n) était majorée par $b \in \mathbb{R}$ prenons $\beta \in \Phi$ tel que $\beta \geqslant b$.
On aurait : $P_\beta \subsetneq \cdots \subsetneq P_{\alpha_n} \subsetneq \cdots \subsetneq P_{\alpha_2} \subsetneq P_{\alpha_1}$, d'où une suite d'idéaux de R/P_β strictement décroissante : $P_{\alpha_1}/P_\beta \supsetneq \cdots \supsetneq P_{\alpha_n}/P_\beta \supsetneq \cdots \supsetneq \{0\}$. Mais R/P_β est artinien comme on l'a vu dans le lemme 1, donc toute suite décroissante d'idéaux doit être stationnaire, contradiction.

Lemme 3 :

Pour tout $\alpha \in \Phi$ (ou même $\alpha \in \mathbb{R}$) : $P_\alpha/P_\alpha^+ \backsimeq P_\alpha\widehat{R}/P_\alpha^+\widehat{R}$; isomorphisme de R-modules.
Et pour $x \in \widehat{R}$: $x \notin H \Longleftrightarrow \exists\ !\ \alpha \in \Phi$ tel que : $x \in P_\alpha\widehat{R} \setminus P_\alpha^+\widehat{R}$
$\Longleftrightarrow \exists\ !\ \alpha \in \Phi$ (le même) tel que : $x = y +$ (élément de $P_\alpha^+\widehat{R}$),
où $y \in P_\alpha \setminus P_\alpha^+$ i.e. $\nu(y) = \alpha$.

---

démonstration :

On a : $R \hookrightarrow \widehat{R}$ injection R-linéaire, d'où : $P_\alpha \overset{j}{\hookrightarrow} P_\alpha\widehat{R}$ injection R-linéaire, j passe aux quotients et reste injective car : $j^{-1}(P_\alpha^+\widehat{R}) = P_\alpha^+$ i.e. : $P_\alpha^+\widehat{R} \cap R = P_\alpha^+$ (fidèle platitude de $\widehat{R}$ sur R).
On a donc $\tilde{j} : P_\alpha/P_\alpha^+ \hookrightarrow P_\alpha\widehat{R}/P_\alpha^+\widehat{R}$ application R-linéaire injective. $\big($Notons que pour $\alpha = 0$, $\tilde{j} : R/\mathcal{M} \hookrightarrow \widehat{R}/\widehat{\mathcal{M}}$ est aussi morphisme d'anneaux (et isomorphisme : [A], prop.10.15 p.109)$\big)$.
Montrons que pour tout $\alpha \in \Phi$, $\tilde{j}$ est aussi surjective.

Soit $\overline{x} \in P_\alpha\widehat{R}/P_\alpha^+\widehat{R}$. $x \in P_\alpha\widehat{R}$, donc : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i g_i$; $h_i \in P_\alpha$, $g_i \in \widehat{R}$.

On écrit pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ $g_i = g'_i +$ (élément de $\mathcal{M}\widehat{R}$), où $g'_i \in R$. En effet comme $\widehat{R}$ est complété métrique de R, on a une suite $(g'_{i,n})_n$ d'éléments de R, convergeant dans $\widehat{R}$ vers g_i, cette suite est de Cauchy, donc : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}$ $g'_{i,n_0+p} = g'_{i,n_0} + a_p$; $a_p \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}\widehat{R}$, mais $\mathcal{M}\widehat{R} = \overline{\mathcal{M}}$ est un fermé de $\widehat{R}$, donc en passant à la limite sur p, $\big((a_p)$ étant convergente comme $(g'_{i,n_0+p})_p\big)$, on obtient ce que l'on veut.

Vérifions alors que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \widetilde{h_i g'_i}$ est antécédent de $\overline{x}$ par $\tilde{j}$.

$$\tilde{j}\Big(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{h_i g'_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \overline{h_i g'_i} \quad \text{et :} \quad \sum_{i=1}^{n} h_i g_i = \sum_{i=1}^{n} h_i g'_i + \sum_{i=1}^{n} \big(h_i\big) \times \big(\text{élément}_i\ \mathcal{M}\widehat{R}\big)$$

avec : $\big(h_i\big) \times \big(\text{élément}_i\ \mathcal{M}\widehat{R}\big) \in P_\alpha\widehat{R}P_0^+\widehat{R} \subset P_\alpha^+\widehat{R}$, d'où : $\overline{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{h_i g_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{h_i g'_i}$.

Passons maintenant aux deux équivalences.
Soit $x \in \widehat{R} \setminus H$. On cherche $\alpha \in \Phi$ tel que $x \in P_\alpha\widehat{R} \setminus P_\alpha^+\widehat{R}$. Notons β le plus petit élément de Φ tel que : $x \notin P_\beta\widehat{R}$ (rappelons que Φ est bien ordonné). β n'est pas 0 (car $P_0 = R$ et donc $P_0\widehat{R} = \widehat{R}$).

On considère : $\alpha = \sup_\Phi\{\gamma \in \Phi \mid \gamma < \beta\}$ $\big($c'est à dire le plus petit des majorants dans Φ de la partie : $A = \{\gamma \in \Phi \ \mid \ \gamma < \beta\}\big)$. On a bien sûr : $\alpha \leqslant \beta$ (car β est majorant de A).
Supposons : $\alpha = \beta$. Par caractérisation de la borne supérieure : $\forall\ \ell \in \Phi,\ \ell < \beta \Rightarrow \exists\ \gamma \in A$ tel que : $\ell < \gamma < \beta$. Partant de : $\gamma_1 = 0$, on pourrait construire une suite strictement croissante (γ_n) d'éléments de A, qui contredirait le lemme 2, donc nécessairement : $\alpha < \beta$.
On en déduit $x \in P_\alpha\widehat{R}$ par définition de β, et il suffit alors de vérifier : $P_\alpha^+ = P_\beta$

(on aura ainsi $x \in P_\alpha\widehat{R} \setminus P_\alpha^+\widehat{R}$).
$\supset)$: Évident.
$\subset)$: Soit $x \in R$ tel que $\nu(x) > \alpha$. Si on avait $\nu(x) < \beta$, alors $\nu(x) \leqslant \alpha$ exclu, donc $\nu(x) \geqslant \beta$.
Notons l'unicité de $\alpha \in \Phi$ tel que $x \in P_\alpha\widehat{R} \setminus P_\alpha^+\widehat{R}$: soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$ de tels éléments, avec par exemple $\alpha_1 < \alpha_2$. On a : $P_{\alpha_2} \subset P_{\alpha_1}^+$ et donc $P_{\alpha_2}\widehat{R} \subset P_{\alpha_1}^+\widehat{R}$, d'où une contradiction.

Montrons maintenant que l'on peut écrire : $x = y +$ (élément de $P_\alpha^+\widehat{R}$) avec $y \in P_\alpha \setminus P_\alpha^+$.

$\overline{x} \in P_\alpha\widehat{R}/P_\alpha^+\widehat{R}$ admet un unique antécédent $\widetilde{y}$ dans P_α/P_α^+ d'après l'isomorphisme précédent, $\widetilde{y} \neq 0$ sinon $\overline{x} = 0$, et $\overline{x} = \overline{y}$ i.e. $x - y \in P_\alpha^+\widehat{R}$.

Enfin cette écriture de x assure que x n'est pas dans H, sinon : $x \in P_\alpha^+\widehat{R}$ et : $y \in P_\alpha^+\widehat{R} \cap R = P_\alpha^+$.

<u>Théorème 1</u> : (Spivakovsky)

H est un idéal premier de $\widehat{R}$ et il existe une unique valuation de $\mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)$, qui soit centrée en $\widehat{R}/H$ et qui prolonge ν. Cette valuation est de groupe de valeurs Γ, et donc de rang 1.

<u>Démonstration</u> :
On pose pour $\widetilde{x} \in \widehat{R}/H\backslash\{0\}$, $\hat{\nu}(\widetilde{x}) = \alpha$, où ce α est celui du lemme 3, en remarquant que :

$$\widetilde{x} \neq 0 \Longleftrightarrow x \in \widehat{R} \setminus H.$$

Voyons que ceci définit une application.
Soient $x_1, x_2 \in \widehat{R} \setminus H$ tels que : $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_2$, auxquels on associe $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$ comme dans le lemme 3. Montrons que l'on a $\alpha_1 = \alpha_2$. Supposons par exemple que : $\alpha_1 < \alpha_2$. Alors : $P_{\alpha_2}\widehat{R} \subset P_{\alpha_1}^+\widehat{R}$, et $x_2 - x_1 \in H \subset P_{\alpha_2}\widehat{R} \Longrightarrow x_1 \in P_{\alpha_2}\widehat{R}$, impossible.

On a donc une application $\hat{\nu} : \widehat{R}/H \longrightarrow \Phi \cup \{+\infty\}$ $\big($on pose : $\hat{\nu}(\widetilde{x}) = +\infty \Leftrightarrow x \in H \Leftrightarrow \widetilde{x} = 0\big)$.
Par ailleurs, on a : $H \cap R = \big(\bigcap_{\beta\in\Phi} P_\beta\widehat{R}\big) \cap R = \bigcap_{\beta\in\Phi} \big(P_\beta\widehat{R} \cap R\big) = \bigcap_{\beta\in\Phi} P_\beta = (0)$, (la dernière égalité étant triviale car Φ cofinal dans $\mathbb{R}$), d'où l'on déduit que le morphisme naturel : $R \longrightarrow \widehat{R}/H$ est injectif. Soit alors $r \in R\backslash\{0\}$. Notons $\delta = \nu(r) \in \Phi$. On a : $r \in P_\delta \setminus P_\delta^+$, d'où : $r \in P_\delta\widehat{R}$ et $r \notin P_\delta^+\widehat{R}$ sinon : $r \in P_\delta^+ \cap R = P_\delta^+$, et donc d'après la définition de $\hat{\nu}$ on a : $\delta = \hat{\nu}(\widetilde{r})$, ce qui montre que l'application $\hat{\nu}$ prolonge ν $\big($bien sûr si $r = 0$, $r \in H$ et $\hat{\nu}(r) = \nu(r) = +\infty\big)$.

Maintenant pour $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widehat{R}/H\backslash\{0\}$, on a :

$$\hat{\nu}(\widetilde{x}\widetilde{y}) = \hat{\nu}(\widetilde{x}) + \hat{\nu}(\widetilde{y})$$
$$\hat{\nu}(\widetilde{x} + \widetilde{y}) \geqslant \min\{\hat{\nu}(\widetilde{x}), \hat{\nu}(\widetilde{y})\}.$$

En effet, posons : $\alpha = \hat{\nu}(\widetilde{x})$ et $\beta = \hat{\nu}(\widetilde{y})$. Comme $x, y \in \widehat{R} \setminus H$ on a vu dans le lemme 3 :

$x = x_0 +$ (élément de $P_\alpha^+\widehat{R}$)

$y = y_0 +$ (élément de $P_\beta^+\widehat{R}$), avec $\nu(x_0) = \alpha$, $\nu(y_0) = \beta$.

On a : $P_\alpha^+\widehat{R}\ .\ P_\beta\widehat{R} = \big(P_\alpha^+P_\beta\big)\widehat{R} \subset P_{\alpha+\beta}^+\widehat{R}$, et de même : $P_\alpha^+\widehat{R}\ .\ P_\beta^+\widehat{R} = \big(P_\alpha^+P_\beta^+\big)\widehat{R} \subset P_{\alpha+\beta}^+\widehat{R}$,
d'où : $xy = x_0y_0 +$ (élément de $P_{\alpha+\beta}^+\widehat{R}$) avec $\nu(x_0y_0) = \alpha + \beta$, donc par définition de $\hat{\nu}$, on a : $\hat{\nu}(\widetilde{xy}) = \alpha + \beta$ i.e. : $\hat{\nu}(\widetilde{x}\widetilde{y}) = \hat{\nu}(\widetilde{x}) + \hat{\nu}(\widetilde{y})$.

Ceci prouve aussi que H est premier car on a : $\forall\ x, y \in \widehat{R}\ \ x, y \notin H \Longrightarrow xy \notin H$ (cf. lemme 3).

Par ailleurs : $P_\alpha^+\widehat{R}+P_\beta^+\widehat{R} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Id}_{\widehat{R}}\Big(\mathrm{Id}_{\widehat{R}}(P_\alpha^+)\cup\mathrm{Id}_{\widehat{R}}(P_\beta^+)\Big)$
$= \mathrm{Id}_{\widehat{R}}\big(P_\alpha^+\cup P_\beta^+\big)$
$= \mathrm{Id}_{\widehat{R}}\big(P^+_{\min\{\alpha,\beta\}}\big)$
$= P^+_{\min\{\alpha,\beta\}}\widehat{R}$.

Donc : $x+y=x_0+y_0+\big(\text{élément de } P^+_{\min\{\alpha,\beta\}}\widehat{R}\big)$, et $\nu(x_0+y_0)\geqslant\alpha+\beta$, i.e. : $x_0+y_0\in P_{\min\{\alpha,\beta\}}$.

• Soit $x+y\in H$.

Alors bien sûr : $+\infty=\hat\nu(\widetilde{x+y})=\hat\nu(\widetilde{x}+\widetilde{y})\geqslant\min\{\hat\nu(\widetilde{x}),\hat\nu(\widetilde{y})\}$.

• Soit $x+y\notin H$.

Notons γ le plus petit élément de Φ tel que $x+y\notin P_\gamma\widehat{R}$. Comme $x+y\in P_{\min\{\alpha,\beta\}}\widehat{R}$, on a $\gamma>\min\{\alpha,\beta\}$, et donc par définition : $\hat\nu(\widetilde{x+y})=\sup_\Phi\{\delta\in\Phi\mid\delta<\gamma\}\geqslant\min\{\alpha,\beta\}$, i.e. : $\hat\nu(\widetilde{x}+\widetilde{y})\geqslant\min\{\hat\nu(\widetilde{x}),\hat\nu(\widetilde{y})\}$.

On sait alors que $\hat\nu$ se prolonge de façon unique en une valuation de $\mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)$ par :

$\hat\nu\Big(\dfrac{\widetilde{x}}{\widetilde{y}}\Big)=\hat\nu(\widetilde{x})-\hat\nu(\widetilde{y})$, et cette valuation prolonge bien sûr ν, et est de groupe de valeurs Γ.

$\hat\nu$ est centrée en $\widehat{R}/H$ car $\Phi\subset\Gamma_+$ et $\mathcal{M}\widehat{R}/H\subset\mathcal{M}_{\hat\nu}$ (voir remarque suivante avec $\mathcal{M}=P_0^+$).

Il reste à vérifier que $\hat\nu$ est l'unique valuation de $\mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)$, centrée en $\widehat{R}/H$, prolongeant ν.

Soit $\bar\nu$ une telle valuation. Pour s'assurer que : $\bar\nu=\hat\nu$, il suffit de vérifier :

$\forall\ \widetilde{x}\in\widehat{R}/H\backslash\{0\},\ \bar\nu(\widetilde{x})=\hat\nu(\widetilde{x})$ (on a ensuite l'unicité du prolongement).

D'après le lemme 3, (et la définition de $\hat\nu$), on a : $x=x_0+\displaystyle\sum_{i=1}^n z_iw_i$, avec : $\hat\nu(\widetilde{x})=\nu(x_0)=\alpha$,
$z_i\in P_\alpha^+,\ w_i\in\widehat{R}$.

Donc : $\widetilde{x}=\widetilde{x}_0+\displaystyle\sum_{i=1}^n\widetilde{z}_i\widetilde{w}_i$ (dans $\widehat{R}/H$), et on a : $\bar\nu(\widetilde{x}_0)=\nu(x_0)=\alpha$ (car $\bar\nu$ prolonge ν), et :

$\bar\nu\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n\widetilde{z}_i\widetilde{w}_i\Big)\geqslant\min_{i=1,\dots,n}\big\{\bar\nu(\widetilde{z}_i)+\bar\nu(\widetilde{w}_i)\big\}\geqslant\min_{i=1,\dots,n}\{\nu(z_i)\}\ >\ \alpha$. D'où : $\bar\nu(\widetilde{x})=\alpha$, cqfd.

Remarque :

Soit $x\in\widehat{R}$ et $\alpha\in\Phi$. On a : $x\in P_\alpha\widehat{R}\Longleftrightarrow\hat\nu(\tilde x)\geqslant\alpha$
$x\in P_\alpha^+\widehat{R}\Longleftrightarrow\hat\nu(\tilde x)>\alpha$.

Les deux équivalences sont triviales si $x\in H$. Sinon, en notant γ le plus petit élément de Φ tel que $x\notin P_\gamma\widehat{R}$, on a : $x\in P_\alpha\widehat{R}\Rightarrow\gamma>\alpha\Rightarrow\hat\nu(\widetilde{x})=\sup_\Phi\{\delta\in\Phi\mid\delta<\gamma\}\geqslant\alpha$ et $x\in P_\alpha^+\widehat{R}\subset P_\alpha\widehat{R}\Rightarrow\hat\nu(\widetilde{x})>\alpha$ (l'égalité signifierait par définition de ν que : $x\in P_\alpha\widehat{R}\setminus P_\alpha^+\widehat{R}$). Réciproquement si $\alpha_1=\hat\nu(\widetilde{x})\geqslant\alpha$ alors $x\in P_{\alpha_1}\widehat{R}\setminus P_{\alpha_1}^+\widehat{R}$ mais $P_{\alpha_1}\widehat{R}\subset P_\alpha\widehat{R}$, de même en remplaçant $\alpha_1\geqslant\alpha$ par : $\alpha_1>\alpha$, vu qu'alors : $P_{\alpha_1}\widehat{R}\subsetneq P_\alpha^+\widehat{R}$.

Lemme 4 : Soit $x\in\widehat{R},\ \beta\in\Phi$.

1) $x\in P_\beta\widehat{R}\Longleftrightarrow\exists\ (x_n)$ suite d'éléments de R convergeant vers x dans $\widehat{R}$,
telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \nu(x_n)\geqslant\beta$ (i.e. $x_n\in P_\beta$)
$\Longleftrightarrow\forall\ (x_n)$ suite d'éléments de R convergeant vers x dans $\widehat{R}$,
$\exists\ n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ \nu(x_n)\geqslant\beta$.

2) $x \in H \iff \exists\ (x_n)$ suite d'éléments de R convergeant vers x dans $\widehat{R}$,
telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \nu(x_n) = +\infty$

$\iff \forall\ (x_n)$ suite d'éléments de R convergeant vers x dans $\widehat{R}$,
on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \nu(x_n) = +\infty.$

<u>démonstration</u> :

1)$\Leftarrow$) : $P_\beta\widehat{R} = \overline{P_\beta}$ idéal de $\widehat{R}$ est un fermé pour la topologie $\mathcal{M}\widehat{R}$-adique donc $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \ \in P_\beta\widehat{R}$.

$\Rightarrow$) : Comme $x \in \widehat{R}$, $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ pour (x_n) suite d'éléments de R. Soit $s \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}^s \subset P_\beta$ et donc tel que $\mathcal{M}^s\widehat{R} \subset P_\beta\widehat{R}$. On a : $\exists\ m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ m \geqslant m_0,\ x - x_m \in \mathcal{M}^s\widehat{R}$ (définition de la convergence dans $\widehat{R}$) et $x \in P_\beta\widehat{R} \Rightarrow \forall\ m \geqslant m_0,\ x_m \in P_\beta\widehat{R} \cap R = P_\beta$ (fidèle platitude de $\widehat{R}$ sur R). Donc $(x_m)_{m\geqslant m_0}$ est suite ad hoc.

$\Rightarrow$) : Soit (x_n) suite d'éléments de R telle que : $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, et on suppose $x \in P_\beta\widehat{R}$. Soit encore $s \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}^s \subset P_\beta$. On a $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\ n \geqslant n_0,\ x_n - x \in \mathcal{M}^s\widehat{R} \subset P_\beta\widehat{R}$. D'où : $\forall\ n \geqslant n_0,\ x_n \in P_\beta$ ($x \in P_\beta\widehat{R}$ par hypothèse).

$\Leftarrow$) : Comme précédemment : $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n,\ x_n \in R$. Par hypothèse ici : $\forall\ n \geqslant n_0\ \ x_n \in P_\beta$. Donc en prenant $(x_n)_{n\geqslant n_0}$, on a bien une suite d'éléments de R convergeant vers x et vérifiant la condition voulue.

2)$\Rightarrow$) : Soit $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'éléments de Φ (il en existe car $+\infty$ est point d'accumulation de Φ et elle converge nécessairement vers $+\infty$, cf. lemme 2). Soit (x_n) une suite d'éléments de R convergeant vers x dans $\widehat{R}$. D'après 1) : $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \exists\ n_k \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\ n \geqslant n_k,\ x_n \in P_{\beta_k}$. On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrairement, puis pour $k \geqslant 1$ on peut choisir $n_k > n_{k-1}$ tel que : $\forall\ n \geqslant n_k,\ x_n \in P_{\beta_k}$ (évident). On a donc ainsi : $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ suite extraite de (x_n) (donc qui converge aussi vers x) telle que : $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \nu(x_{n_k}) \geqslant \beta_k$, donc telle que : $\lim\limits_{k} \nu(x_{n_k}) = +\infty$.

$\Leftarrow$) : Soit (x_n) suite d'éléments de R comme dans l'hypothèse. Soit $\beta \in \Phi$. $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}^s\widehat{R} \subset P_\beta\widehat{R}$ et : $\exists\ n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant n_1,\ x - x_n \in \mathcal{M}^s\widehat{R} \subset P_\beta\widehat{R}$,
$\exists\ n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant n_2,\ x_n \in P_\beta\widehat{R}$ ($\nu(x_n) \geqslant \beta$),
donc en prenant $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$, on voit que : $x \in P_\beta\widehat{R}$.

$\Leftarrow$) : Comme $x \in \widehat{R}$, il existe une suite d'éléments de $\widehat{R}$ qui converge vers x, on lui applique la réciproque précédente.

$\Rightarrow$) : Soit (y_n) suite d'éléments de R qui converge vers x dans $\widehat{R}$ et soit (x_n) la suite construite précédemment. Soit $\beta \in \Phi$, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\ n \geqslant n_0,\ \nu(y_n) \geqslant \beta$.
La suite $(x_n - y_n)$ tend vers 0 (car $\widehat{R}$ muni de la topologie $\widehat{\mathcal{M}}$-adique est un anneau topologique, on a les opérations sur les limites). Soit toujours $s \in \mathbb{N}$ tel que : $\mathcal{M}^s\widehat{R} \subset P_\beta\widehat{R}$.
$\exists\ n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant n_1,\ x_n - y_n \in \mathcal{M}^s\widehat{R} \subset P_\beta\widehat{R}$, $\exists\ n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant n_2,\ x_n \in P_\beta \subset P_\beta\widehat{R}$. Donc $\forall\ n \geqslant n_0 = \max\{n_1, n_2\},\ y_n = x_n - (x_n - y_n) \in P_\beta\widehat{R} \cap R = P_\beta$, cqfd.

<u>Remarque</u> : Nouvelle définition de la valuation $\hat{\nu}$ prolongeant ν.

Soit $\widetilde{x} \in \widehat{R}/H$, et soit (x_n) une suite d'éléments de R, convergeant vers x dans $\widehat{R}$. On a :

- Ou bien $x \in H$, i.e. $\widetilde{x} = 0$, alors : $\hat{\nu}(\widetilde{x}) = \lim \nu(x_n) = +\infty$ (lemme 4).
- Ou bien $x \notin H$, alors : $\big(\nu(x_n)\big)$ est constante à partir d'un certain rang, égale à $\hat{\nu}(\widetilde{x})$,
$\big($donc aussi : $\hat{\nu}(\widetilde{x}) = \lim \nu(x_n)\big)$.

---

démonstration :

Le premier cas est le lemme 4. On s'interesse donc au 2^e cas. On prend $\gamma \in \Phi$ strictement plus grand que tous les $\nu(x_n)$. Cela est possible car sinon on pourrait construire une suite extraite $\big(x_{n_k}\big)$ de (x_n) telle que : $\lim \nu(x_{n_k}) = +\infty$, et encore d'après le lemme 4 on aurait : $x \in H$, ce qui n'est pas, par hypothèse. Maintenant pour n assez grand, on a : $x - x_n \in P_\gamma \widehat{R}$, (car on a déjà vu : $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}^s \subset P_\gamma$), donc on a : $\widetilde{x} = \widetilde{x_n} + \widetilde{x - x_n}$, avec : $\hat{\nu}(\widetilde{x - x_n}) \geqslant \gamma > \hat{\nu}(\widetilde{x_n}) = \nu(x_n)$ (par hypothèse et d'après la remarque précédent le lemme 4), donc on peut dire : $\hat{\nu}(\widetilde{x}) = \nu(x_n)$, cqfd.

Proposition 1 : On a les isomorphismes de R-algèbres graduées :

$$\mathrm{gr}_\nu R \backsimeq \mathrm{gr}_{\hat{\nu}}(\widehat{R}/H) \quad \text{i.e :} \bigoplus_{\alpha\in\Phi} P_\alpha/P_\alpha^+ \backsimeq \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \widetilde{P}_\alpha/\widetilde{P}_\alpha^+$$
$$\mathrm{gr}_\nu(R_\nu) \backsimeq \mathrm{gr}_{\hat{\nu}}(R_{\hat{\nu}}) \quad \text{i.e :} \bigoplus_{\gamma\in\Gamma_+} \mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\gamma^+ \backsimeq \bigoplus_{\gamma\in\Gamma_+} \widetilde{\mathbb{P}}_\gamma/\widetilde{\mathbb{P}}_\gamma^+$$

avec : $\widetilde{P}_\alpha = \{\tilde{x} \in \widehat{R}/H \mid \hat{\nu}(\tilde{x}) \geqslant \alpha\}$, $\mathbb{P}_\gamma = \{\ x \in K \mid \nu(x) \geqslant \gamma\ \} = \{\ x \in R_\nu \mid \nu(x) \geqslant \gamma\}$,
et : $\widetilde{\mathbb{P}}_\gamma = \{\ X \in \mathrm{Frac}(\widehat{R}/H) \mid \hat{\nu}(X) \geqslant \gamma\} = \{\ X \in R_{\hat{\nu}} \mid \hat{\nu}(X) \geqslant \gamma\}$, (pour $\alpha \in \Phi,\ \gamma \in \Gamma_+$),
sous R-modules de $\widehat{R}/H,\ K$ (et R_ν) et $\mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)$ (et $R_{\hat{\nu}}$) respectivement.
Toutes ces R-algèbres sont intègres (car ν et $\hat{\nu}$ sont des valuations) et on a un isomorphisme de $\mathrm{Frac}\big(\mathrm{gr}_\nu(R)\big)$ sur $\mathrm{Frac}\big(\mathrm{gr}_\nu(R_\nu)\big)$. Donc, à isomorphisme près, elles ont toutes même corps de fractions.

---

démonstration :

On considère pour $\alpha \in \Phi$: $\varphi_\alpha :\ P_\alpha \widehat{R} \longrightarrow \widetilde{P}_\alpha$
$x \ \rightarrow\ \tilde{x}$, morphisme de $\widehat{R}$-modules , bien défini car on a vu :
$x \in P_\alpha \widehat{R} \Leftrightarrow \hat{\nu}(\tilde{x}) \geqslant \alpha$. Notons que φ_α a pour noyau $H \subset P_\alpha \widehat{R}$ (bien sûr).
De plus, les φ_α pour $\alpha \in \Phi$ vérifient la propriété $(*)$ suivante :
$\forall\ \alpha,\ \beta \in \Phi,\ \forall\ (x, y) \in P_\alpha \widehat{R} \times P_\beta \widehat{R}, \quad \varphi_\alpha(x)\varphi_\beta(y) = \varphi_{\alpha+\beta}(xy)$.
En effet par définition de la loi quotient sur $\widehat{R}/H$, on a : $\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}$, avec si $\hat{\nu}(\tilde{x}) \geqslant \alpha$ et $\hat{\nu}(\tilde{y}) \geqslant \beta$, $\hat{\nu}(\widetilde{xy}) \geqslant \alpha_+\beta$. Maintenant les φ_α passent au quotient, on a pour tout $\alpha \in \Phi$:
$\bar{\varphi}_\alpha : P_\alpha \widehat{R}/P_\alpha^+ \widehat{R} \longrightarrow \widetilde{P}_\alpha/\widetilde{P}_\alpha^+$ car : $\varphi_\alpha(P_\alpha^+ \widehat{R}) \subset \widetilde{P}_\alpha^+$ $(x \in P_\alpha^+ \widehat{R} \Rightarrow \hat{\nu}(\tilde{x}) > \alpha)$.
$\bar{\varphi}_\alpha$ est injective : $\varphi_\alpha^{-1}(\widetilde{P}_\alpha^+) = P_\alpha^+ \widehat{R}$ (pour $x \in P_\alpha \widehat{R}, \quad \varphi_\alpha(x) \in \widetilde{P}_\alpha^+ \Leftrightarrow \hat{\nu}(\tilde{x}) > \alpha \Leftrightarrow x \in P_\alpha^+ \widehat{R}$),
et aussi surjective : car φ_α l'est : on a restreint l'arrivée de façon ad hoc.
$\bar{\varphi}_\alpha$ est donc un isomorphisme de $\widehat{R}$-modules. Soit $\psi_\alpha : P_\alpha \longrightarrow P_\alpha \widehat{R}$ l'inclusion. On a vu dans le lemme 3 l'isomorphisme : $\bar{\psi}_\alpha : P_\alpha/P_\alpha^+ \backsimeq P_\alpha \widehat{R}/P_\alpha^+ \widehat{R}$.
On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
P_\alpha \arrow[r, hook, "\psi_\alpha"] \arrow[d] & P_\alpha \widehat{R} \arrow[r, two heads, "\varphi_\alpha"] \arrow[d] & \widetilde{P}_\alpha \arrow[d] \\
P_\alpha/P_\alpha^+ \arrow[r, "\backsimeq", "\bar{\psi}_\alpha"'] & P_\alpha \widehat{R}/P_\alpha^+ \widehat{R} \arrow[r, "\backsimeq", "\bar{\varphi}_\alpha"'] & \widetilde{P}_\alpha/\widetilde{P}_\alpha^+
\end{tikzcd}$$

Et : $P_\alpha/P_\alpha^+ \backsimeq \widetilde{P}_\alpha/\widetilde{P}_\alpha^+$, isomorphisme de R-modules.

Soit $\bar{u}_\alpha = \bar{\varphi}_\alpha \circ \bar{\psi}_\alpha$ cet isomorphisme. Notons que $\bar{u}_0 : R/\mathcal{M} \longrightarrow (\widehat{R}/H \diagup \mathcal{M}\widehat{R}/H) = \widehat{R}/\mathcal{M}\widehat{R}$ est aussi un morphisme d'anneaux.
On sait que : $f = \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \bar{u}_\alpha : \mathrm{gr}_\nu(R) \rightarrow \mathrm{gr}_{\hat{\nu}}(\widehat{R}/H)$, morphisme somme directe des u_α est un isomorphisme de R-modules (gradués).
De plus, on a bien sûr : $f(1_{\mathrm{gr}_\nu(\mathrm{R})}) = \bar{u_0}(1_{R/\mathcal{M}}) = 1_{(\widehat{R}/H\diagup\mathcal{M}\widehat{R}/H)} = 1_{\mathrm{gr}_{\hat{\nu}}(\widehat{\mathrm{R}}/\mathrm{H})}$, et grâce à $(*)$ on a donc un (iso)morphisme d'anneaux (unitaire) :

$$f((\sum_{\alpha\in\Phi}\bar{x}_\alpha)(\sum_{\beta\in\Phi}\bar{y}_\beta)) = f(\sum_{k\in\Phi}\sum_{\alpha+\beta=k}\bar{u}_k(\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha) = f(\sum_{\alpha\in\Phi}\bar{x}_\alpha)f(\sum_{\beta\in\Phi}\bar{y}_\beta),$$

la dernière égalité ayant lieu car :

$$\bar{u}_k(\bar{x}_\alpha\bar{y}_\beta) = u_k\widetilde{(x_\alpha y_\beta)} = u_\alpha\widetilde{(x_\alpha)u_\beta}(y_\beta) = \widetilde{u_\alpha(x_\alpha)}\widetilde{u_\beta(y_\beta)} = \bar{u}_\alpha(\bar{x}_\alpha)\bar{u}_\beta(\bar{y}_\beta).$$

Voyons maintenant le 2^e isomorphisme.
Soit $\gamma\in\Gamma_+$. Vu que l'on a $R \hookrightarrow \widehat{R}/H$ et donc $K \hookrightarrow \mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)$, on a l'inclusion $i_\gamma : \mathbb{P}_\gamma \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}_\gamma$, qui est un morphisme de R-modules. On a bien sûr : $i_\gamma^{-1}(\widetilde{\mathbb{P}}_\gamma^+) = \mathbb{P}_\gamma^+$, i.e. : $x \in \widetilde{\mathbb{P}_\gamma^+}\bigcap\mathbb{P}_\gamma \Leftrightarrow x\in\mathbb{P}_\gamma^+$.
Donc on a : $\overline{i_\gamma} : \mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\gamma^+ \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}_\gamma/\widetilde{\mathbb{P}}_\gamma^+$
$\bar{x} \rightarrow \tilde{x}$ injection de R-modules.
Mais ce morphisme est aussi surjectif : soit $\widetilde{X}\in\widetilde{\mathbb{P}}_\gamma/\widetilde{\mathbb{P}}_\gamma^+$, $X\in\mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)$, et on peut supposer $\widetilde{X}\neq\widetilde{0}$ (sinon 0 antécédent trivial), i.e. : $\hat{\nu}(X)=\gamma$. On a : $X = \dfrac{\hat{a}}{\hat{b}}$ avec $\hat{a},\ \hat{b}\in\widehat{R}/H\setminus\{\hat{0}\}$ d'où $\gamma = \hat{\nu}(\hat{a}) - \hat{\nu}(\hat{b})$, et si on pose : $\hat{\nu}(\hat{b}) = \beta\in\Phi$, alors $\hat{\nu}(\hat{a}) = \gamma+\beta\in\Phi$, donc d'après le lemme 2 (et la définition de $\hat{\nu}$) on a $a_0,\ b_0\in R\setminus\{0\}$ tels que :

$a = a_0 + \text{élément}P^+_{\gamma+\beta}\widehat{R}$

$b = b_0 + \text{élément}P^+_{\beta}\widehat{R}$, avec $\nu(a_0) = \gamma+\beta$, $\nu(b_0) = \beta$.

On a donc un élément $x = \dfrac{a_0}{b_0}\in K$ tel que $\nu(x) = \nu(a_0)-\nu(b_0) = \gamma$.
Vérifions que : $\bar{x}\in\mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\gamma^+$ est antécédent de $\widetilde{X}$.
Par définition de $\overline{i_\gamma}$ son image est : $\widetilde{\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right)}$, et on a : $\widetilde{\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right)} = \widetilde{\left(\dfrac{\hat{a}}{\hat{b}}\right)} \Leftrightarrow \dfrac{\hat{a}}{\hat{b}} - \dfrac{a_0}{b_0}\in\widetilde{\mathbb{P}_\gamma^+}$, mais : $\dfrac{\hat{a}}{\hat{b}} - \dfrac{a_0}{b_0} = \dfrac{b_0\hat{a}-a_0\hat{b}}{\hat{b}b_0}$ et $a_0 = \hat{a}_0,\ b_0 = \hat{b}_0$ (car $R\subset\widehat{R}/H$), donc le numérateur est $b_0\widehat{a-a_0}b$ dans $\widehat{R}/H$. Par ailleurs : $b_0a - a_0b = b_0a_0 - a_0b_0 + (\text{élément de } P^+_{(\gamma+\beta+\beta)}\widehat{R}) = \text{élément de } P^+_{\gamma+2\beta}\widehat{R}$, et donc d'après la $1^{\text{ère}}$ remarque suivant le théorème 1 : $\hat{\nu}(b_0\widehat{a-a_0}b) > \gamma+2\beta$.
Comme $\hat{\nu}(\hat{b}b_0) = 2\beta$, on a bien ce que l'on voulait.

On a donc : $g = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma_+}\overline{i_\gamma}$: $\displaystyle\bigoplus_{\gamma\in\Gamma_+}\mathbb{P}_\gamma/\mathbb{P}_\gamma^+ \longrightarrow \bigoplus_{\gamma\in\Gamma_+}\widetilde{\mathbb{P}}_\gamma/\widetilde{\mathbb{P}}_\gamma^+$, isomorphisme de R-modules.

Notons que pour $\gamma = 0$, $\overline{i_0} : R_\nu/\mathcal{M}_\nu \rightarrow R_{\hat{\nu}}/\mathcal{M}_{\hat{\nu}}$, est aussi morphisme d'anneaux, et que les inclusions $i_\gamma : \mathbb{P}_\gamma \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}_\gamma$, pour $\gamma\in\Gamma_+$, vérifient la propriété $(*)$: $i_{\gamma_1}(x).i_{\gamma_2}(y) = i_{\gamma_1+\gamma_2}(xy)$ $\big($dans $\mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)\big)$, donc comme on a déjà vu : g est un morphisme d'anneaux (et donc de R-algèbres).

Il reste à vérifier : $\mathrm{Frac}(\mathrm{gr}_\nu R)$=$\mathrm{Frac}(\mathrm{gr}_\nu R_\nu)$.
Pour tout $\alpha\in\Phi$, on a l'inclusion $P_\alpha\hookrightarrow\mathbb{P}_\alpha$, morphisme de R-modules (d'anneaux si $\alpha = 0$), et comme $\mathbb{P}_\alpha^+\cap R = P_\alpha^+$ on a : $P_\alpha/P_\alpha^+ \hookrightarrow \mathbb{P}_\alpha/\mathbb{P}_\alpha^+$, morphisme injectif de R-modules (d'anneaux si $\alpha = 0$), d'où puisque $\Phi\subset\Gamma_+$, un morphisme injectif de R-algèbres : $\mathrm{gr}_\nu R \overset{\rho}{\hookrightarrow} \mathrm{gr}_\nu R_\nu$, (on met des zéros là où il y a des trous et on a bien sûr $(*)$ pour les $P_\alpha\hookrightarrow\mathbb{P}_\alpha$), et d'où aussi : $\mathrm{Frac}(\mathrm{gr}_\nu R) \overset{\tilde{\rho}}{\hookrightarrow} \mathrm{Frac}(\mathrm{gr}_\nu R_\nu)$.

On va vérifier que ce morphisme est aussi surjectif. Il suffit de vérifier que tout élément homogène non nul de $\mathrm{gr}_\nu R_\nu$ admet un antécédent par $\tilde{\rho}$. Soit $\widetilde{x}^\alpha$, où $\alpha \in \Gamma_+$ et $x = \dfrac{a}{b} \in K,\ a,\ b \in R \setminus \{0\}$, un tel élément. Comme on le suppose non nul $x \in \mathbb{P}_\alpha \setminus \mathbb{P}_\alpha^+$ et donc $\alpha = \nu(x) = \nu(a) - \nu(b)$. Notons $\beta = \nu(b) \in \Phi$, alors $\nu(a) = \alpha + \beta \in \Phi$ et $\dfrac{\bar{a}^{\alpha+\beta}}{\bar{b}^\beta}$ est l'antécédent cherché. En effet son image par $\tilde{\rho}$ est par définition : $\dfrac{\widetilde{a}^{\alpha+\beta}}{\widetilde{b}^\beta}$, or : $\dfrac{\widetilde{a}^{\alpha+\beta}}{\widetilde{b}^\beta} = \widetilde{x}^\alpha \Longleftrightarrow \widetilde{a}^{\alpha+\beta} = \widetilde{(\dfrac{a}{b})}^\alpha \times \widetilde{b}^\beta$ (dans $\mathrm{gr}_\nu R_\nu$), ce qui est vrai par définition de la loi du gradué.

Dorénavant on suppose que R est un G-anneau (anneau de Grothendieck), i.e. :

$*$ R nœthérien

$*$ Pour tout idéal premier P de R, $R_P \longrightarrow \widehat{R_P}$ est un morphisme régulier i.e. : pour tout premier $\mathcal{P}$ de R_P, la fibre $\widehat{R_P} \underset{R_P}{\otimes} \kappa(\mathcal{P})$ est géométriquement régulière sur $\kappa(\mathcal{P})$ i.e. : pour toute extension finie K' de $\kappa(\mathcal{P})$, $\widehat{R_P} \underset{R_P}{\otimes} \kappa(\mathcal{P}) \underset{\kappa(\mathcal{P})}{\otimes} K' = \widehat{R_P} \underset{R_P}{\otimes} K'$ est régulier.

C'était bien le cas de $k[u,v]_{(u,v)}$ de l'exemple 1 (cf. [M], p.259 : toute k-algèbre de polynômes est un G-anneau et tout localisé ou tout quotient de G-anneau en est aussi un).

<u>Proposition 2</u> : $\widehat{R}_H$ est un anneau local régulier, géométriquement régulier sur K.

<u>démonstration</u> :

D'abord $\widehat{R}_H$ est un “localisé” de : $K \underset{R}{\otimes} \widehat{R}$.

En effet soit : $T = \widehat{R} \setminus H, S = R \setminus \{0\}$ parties multiplicatives de $\widehat{R}$. On a : $S \subset T$ (car $H \cap R = \{0\}$), d'où :

$$\begin{aligned} \widehat{R}_H &= T^{-1}\widehat{R} \\ &= T^{-1}(S^{-1}\widehat{R}) \\ &= T^{-1}(S^{-1}(R \underset{R}{\otimes} \widehat{R})) \\ &= T^{-1}(S^{-1}R \underset{R}{\otimes} \widehat{R}) \\ &= T^{-1}(K \underset{R}{\otimes} \widehat{R}). \end{aligned}$$

Mais comme on suppose que R est un G-anneau, $K \underset{R}{\otimes} \widehat{R}$ est un anneau régulier :

- il est nœthérien car c'est $S^{-1}\widehat{R}$, avec $\widehat{R}$ nœthérien.

- soit $\mathcal{M}$ le maximal de R donc $R_\mathcal{M} = R$, $\widehat{R_\mathcal{M}} = \widehat{R}$. On a : R est G-anneau $\overset{\text{def}}{\Longrightarrow} R_\mathcal{M} \to \widehat{R_\mathcal{M}}$ morphisme régulier i.e. : $\forall\ P \in \mathrm{spec}(R)$, $\widehat{R} \underset{R}{\otimes} \kappa(P)$ géométriquement régulière sur $\kappa(P)$ et donc en prenant $P = \{0\}$, (R intègre), $K' = K$ extension finie de K, on a : $\kappa(P) = \mathrm{Frac}(R/\{0\}) = K$ et $\widehat{R} \underset{R}{\otimes} K \underset{K}{\otimes} K' = \widehat{R} \underset{R}{\otimes} K$ est donc régulier.

On en déduit que $\widehat{R}_H$ est (local) régulier d'après l'équivalence suivante :

Soit A un anneau nœthérien, A est régulier $\Longleftrightarrow$ pour toute partie multiplicative S de A, $S^{-1}A$ est régulier.

$\Leftarrow$) : évident on prend $S = A \setminus P$ où P décrit les premiers de A.

$\Rightarrow$) : soit $S^{-1}P$ premier de $S^{-1}A$, (P premier de A disjoint de S), alors : $(S^{-1}A)_{S^{-1}P} \backsimeq A_P$ et A_P est par hypothèse régulier, cqfd.

Maintenant $\widehat{R}_H$ est géométriquement régulier sur K : d'abord on a bien $K \subset \widehat{R}_H$ car $i : R \hookrightarrow \widehat{R}$ passe aux localisés $\big(i(R \setminus \{0\}) \subset \widehat{R} \setminus H\big)$, et reste injective car R intègre, ensuite soit K' extension finie de K, on a : $\widehat{R}_H \underset{K}{\otimes} K' = T^{-1}(K \underset{R}{\otimes} \widehat{R}) \underset{K}{\otimes} K' = T^{-1}(K \underset{R}{\otimes} \widehat{R} \underset{K}{\otimes} K') = T^{-1}(\widehat{R} \underset{R}{\otimes} K')$, régulier d'après l'équivalence ci-dessus (car R est G-anneau).

<u>Remarque</u> : Du fait de la bijection croissante :

$$\left\{\begin{matrix}\text{premiers minimaux de } \widehat{R} \\ \text{disjoints de } S = \widehat{R} \setminus H\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \{ \text{ premiers minimaux de } \widehat{R}_H\}, \quad \big(\text{[M.P.], prop.5.3, cor.5.4 p.30}\big),$$

et du fait que : $\widehat{R}_H$ local régulier $\Rightarrow$ $\widehat{R}_H$ intègre, ([M], th.14.3 p.106 ou [Z.S.] cor.1 th.25 p.301), on déduit que (0) est le seul premier minimal de $\widehat{R}_H$; et qu'il correspond donc à un seul premier minimal de $\widehat{R}$ disjoint de $S = \widehat{R} \setminus H$ i.e. : inclus dans H, on le note : N ; et on l'appelle premier minimal implicite de $\widehat{R}$ associé à ν. Ainsi $N \subset H$ et $N \cap R = (0)$. Dans le cas où $\widehat{R}$ est intègre on a bien sûr $N = (0)$.

<u>Théorème 2</u> :

Soit $\widehat{K}$ le corps des fractions de $\widehat{R}/N$. Il existe une extension v de ν à $\widehat{K}$ qui soit centrée en $\widehat{R}/N$.

<u>Démonstration</u> :

Notons que l'on a bien $K \subset \widehat{K}$ car $R \subset \widehat{R}/N$ $\big(N \cap R = (0)\big)$. Soit μ une valuation monomiale de Frac$(\widehat{R}_H)$ centrée en $\widehat{R}_H$, (il en existe car $\widehat{R}_H$ est local régulier : par exemple la valuation $\mathcal{M}\widehat{R}_H$-adique). La localisation de $\widehat{R}/N$ en H/N est l'anneau $\widehat{R}_H/N\widehat{R}_H$ mais $N\widehat{R}_H$ est premier minimal de $\widehat{R}_H$ car image du premier minimal N (disjoint de $\widehat{R} \setminus H$) de $\widehat{R}_H$ donc $N\widehat{R}_H = (0)$ et donc cette localisation est l'anneau $\widehat{R}_H$ et $\widehat{K} = \mathrm{Frac}(\widehat{R}/N) = \mathrm{Frac}(\widehat{R}_H)$.
Par ailleurs $\widehat{R}_H/H\widehat{R}_H = \mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)$ et $\mathcal{M}_\mu \cap \widehat{R}_H = H\widehat{R}_H$ $(= \mathcal{M}\widehat{R}_H)$ est le maximal de $\widehat{R}_H$ donc on a : $\mathrm{Frac}(\widehat{R}/H) \hookrightarrow R_\mu/\mathcal{M}_\mu$.
On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \widehat{R}/N \arrow[r, two heads, "p_0"] \arrow[d, hook] & \widehat{R}/H \arrow[d, hook] \\
K \arrow[r, hook] & \widehat{R}_H = \widehat{R}_H/N\widehat{R}_H \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \widehat{R}_H/H\widehat{R}_H = \mathrm{Frac}(\widehat{R}/H) \arrow[d, hook] \\
 & R_\mu \arrow[r, two heads, "p"'] \arrow[d, hook] & R_\mu/\mathcal{M}_\mu \\
 & \widehat{K} &
\end{tikzcd}$$

Maintenant on étend la valuation $\hat{\nu}$ de $\mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)$ en une valuation de $R_\mu/\mathcal{M}_\mu$ (encore notée $\hat{\nu}$), cela est possible d'après le théorème d'extension (cf. [Z.S.], th.5$'$ p.13).
Alors $p^{-1}(R_{\hat{\nu}}) = S$ est anneau de valuation d'une valuation v de $\widehat{K}$ (v est la "composée" de μ et $\hat{\nu}$) avec : S domine birationnellement $\widehat{R}/N$ ($\Leftrightarrow v$ centrée en $\widehat{R}/N$) et avec de plus : v prolonge ν.
Vérification : S est sous-anneau de R_μ et $\widehat{R}/N \subset S$: si $x \in \widehat{R}/N,\ p(x) = p_0(x) \in \widehat{R}/H \subset R_{\hat{\nu}}$. De plus : $\mathrm{Frac}(S) = \widehat{K}$ (car $\widehat{R}/N \subset S \subset R_\mu$). Soit maintenant $x \in \widehat{K}$, montrons x ou x^{-1} est dans S.
Si $x \notin S$: ou bien $x \notin R_\mu$, alors $x^{-1} \in R_\mu$ (anneau de valuation de μ de $\widehat{K}$) et même $x^{-1} \in \mathcal{M}_\mu$ (sinon x^{-1} inversible dans R_μ et $x \in R_\mu$), mais $\mathcal{M}_\mu \subset S$ car si $y \in \mathcal{M}_\mu,\ p(y) = 0 \in R_{\hat{\nu}}$;

ou bien $x \in R_\mu$, si $x \in \mathcal{M}_\mu$, $x \in S$ exclu, donc $x \notin \mathcal{M}_\mu$, x inversible dans R_μ, $p(x^{-1}) = p(x)^{-1}$ et on a supposé $p(x) \notin R_{\hat\nu}$ (i.e. : $x \notin S$) donc $p(x)^{-1} \in R_{\hat\nu}$ et $x^{-1} \in S$.
Donc S est l'anneau d'une valuation v de $\widehat{K}$, et elle est centrée en $\widehat{R}/N$:

si $\tilde{x} \in \mathcal{M}\widehat{R}/N$, $p_0(\tilde{x}) \in \mathcal{M}\widehat{R}/H$, donc $\hat\nu(p(\tilde{x})) = \hat\nu(p_0(\tilde{x})) > 0$ et $\tilde{x} \in p^{-1}(\mathcal{M}_{\hat\nu}) \cap \widehat{R}/N \subset \mathcal{M}_v$, (comme S est local, l'idéal engendré dans S par $p^{-1}(\mathcal{M}_{\hat\nu}) \cap \widehat{R}/N$ est contenu dans $\mathcal{M}_v$).
Enfin v prolonge $\hat\nu$. Regardons en effet le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] \arrow[d, "\nu"] & \widehat{K} \arrow[d, "v"] \\ K/U(R_\nu) & \widehat{K}/U(S) \end{tikzcd}$$

Pour que v étende ν il faut et il suffit que : $U(S) \cap K = U(R_\nu)$, $\big(K/U(R_\nu)$ et $\widehat{K}/U(S)$ étant les groupes de valeurs de ν et $v\big)$. Notons $p_1 : S \longrightarrow R_{\hat\nu}$ la restriction de p à S et $R_{\hat\nu}$, bien sûr aussi surjective. On a alors : $p_1^{-1}(\mathcal{M}_{\hat\nu}) = \mathcal{M}_v$. En effet comme $R_v = S$ est local, $p_1^{-1}(\mathcal{M}_{\hat\nu}) \subset \mathcal{M}_v$, et donc $\mathcal{M}_{\hat\nu} \overset{\text{(p surj)}}{=} p_1(p_1^{-1}(\mathcal{M}_{\hat\nu})) \subset p_1(\mathcal{M}_v)$ avec $p_1(\mathcal{M}_v)$ idéal de $R_{\hat\nu}$ car p_1 surjective, donc :
$\mathcal{M}_{\hat\nu} = p_1(\mathcal{M}_v)$ et $p_1^{-1}(\mathcal{M}_{\hat\nu}) = p_1^{-1}(p_1(\mathcal{M}_v)) \supset \mathcal{M}_v$, d'où l'égalité.
On a aussi alors : $p_1^{-1}(U(R_{\hat\nu})) = p_1^{-1}(R_{\hat\nu} \setminus \mathcal{M}_{\hat\nu}) = S \setminus \mathcal{M}_v = U(S)$.
Le premier diagramme, tenant compte de p_1, devient :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \widehat{R}/N \arrow[r, two heads, "p_0"] \arrow[d, hook] & \widehat{R}/H \arrow[d, hook] \\ K \arrow[d, hook] & S = R_v \arrow[r, two heads, "p_1"] \arrow[d, hook] & R_{\hat\nu} \subset \mathrm{Frac}(\widehat{R}/H) \arrow[d, hook] \\ \widehat{R}_H \arrow[r, hook] & R_\mu \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, hook] & R_\mu/\mathcal{M}_\mu \\ & \widehat{K} & \end{tikzcd}$$

${p_1}_{|R} = {p_0}_{|R} : R \longrightarrow R_{\hat\nu}$ est injective $\big($car $H \cap R = (0)\big)$, on a d'ailleurs vu son prolongement : $K \hookrightarrow \mathrm{Frac}(\widehat{R}/H)$ dans la définition de $\hat\nu$.
Soit alors $x \in \widehat{K}$, on a :
$$\begin{aligned} x \in U(S) \cap K &\Longleftrightarrow 0 = \hat\nu(p_1(x)) \text{ et } x = \frac{a}{b} \text{ où } a, b \in R \setminus \{0\} \\ &\Longleftrightarrow 0 = \hat\nu({p_0}_{|R}(a){p_0}_{|R}(b)^{-1}) \text{ avec } x = \frac{a}{b} \\ &\Longleftrightarrow 0 = \nu(x) \text{ et } x \in K \quad (\text{car } \hat\nu \text{ prolonge } \nu) \\ &\Longleftrightarrow x \in U(R_\nu), \text{ cqfd.} \end{aligned}$$

<u>Définition</u> : On appelle extension régulière de ν à $\widehat{K}$ l'extension v considerée dans la démonstration précédente (i.e. la "composée" de $\hat\nu$ et μ).

On étudie maintenant ce que devient H par éclatements locaux, (morphismes locaux injectifs **birationnels** entre anneaux locaux nœthériens intègres), et plus généralement par morphismes locaux injectifs d'anneaux locaux nœthériens intègres.

Soit $\Pi : R \hookrightarrow R'$ un tel morphisme.
Étant local, il est continu pour les topologies $\mathcal{M}$-adique et $\mathcal{M}'$-adique de R et R'. On sait alors que l'on a un (unique) prolongement continu, local : $\widehat{\Pi} : \widehat{R} \longrightarrow \widehat{R'}$.
Par ailleurs Π étant injectif, il se prolonge aux corps des fractions K et K' de R et R'.
On suppose que ν s'étend en une valuation ν' de K', centrée en R', et aussi de rang 1. On note : $\Gamma' = \nu'(K')$ son groupe des valeurs et $\Phi' = \nu'(R')$. On a bien sûr Φ sous monoïde de Φ' et Γ sous groupe de Γ'. Résumons :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{R'} & R' \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & K' \arrow[r, "\nu'"] & \Gamma' = K'/U(R_{\nu'}) \\
\widehat{R} \arrow[u, "\widehat{\Pi}"] & R \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[u, hook, "\Pi"] & K \arrow[r, "\nu"] \arrow[u, hook] & \Gamma = K/U(R_{\nu}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

<u>Proposition 3</u> : Pour $\beta \in \Phi,\ P_\beta \widehat{R} = P'_\beta \widehat{R'} \cap \widehat{R}$, où bien sûr : $P'_\beta = \{x \in R' \mid \nu'(x) \geqslant \beta\}$.

<u>démonstration</u> :
Si $x \in P_\beta \widehat{R},\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ où $a_i \in P_\beta,\ x_i \in \widehat{R}$ et alors : $\widehat{\Pi}(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\Pi}(x_i) \in P'_\beta \widehat{R'}$ car ν' prolonge ν et car $\widehat{\Pi}$ prolonge Π. Donc $x \in \widehat{\Pi}^{-1}(P'_\beta \widehat{R'}) = P'_\beta \widehat{R'} \cap \widehat{R}$.
Réciproquement soit $x \in P'_\beta \widehat{R'} \cap \widehat{R}$, et soit (x_n) une suite d'éléments de R convergeant vers x dans $\widehat{R}$. Comme $\widehat{\Pi}$ est continu : $\big(\widehat{\Pi}(x_n)\big)$ converge vers $\widehat{\Pi}(x)$ dans $\widehat{R'}$ ou encore : (x_n) converge vers $\widehat{\Pi}(x)$ dans $\widehat{R'}$ car $\widehat{\Pi}$ prolonge Π et Π injectif. Mais par hypothèse : $\widehat{\Pi}(x) \in P'_\beta \widehat{R'}$, donc d'après le lemme 4 appliqué dans $\widehat{R'}$: $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant n_0,\ \nu'(x_n) \geqslant \beta$ i.e. $\nu(x_n) \geqslant \beta$. Mais alors par le même lemme 4 appliqué dans $\widehat{R}$ comme : $(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\widehat{R}} x$, on a : $x \in P_\beta \widehat{R}$, cqfd.

<u>Corollaire</u> : $H' \cap \widehat{R} = H$.

<u>démonstration</u> :
$\subset$) Soit $x \in H' \cap \widehat{R}$. $\forall\ \beta \in \Phi \subset \Phi',\ x \in P'_\beta \widehat{R'} \cap \widehat{R} = P_\beta \widehat{R}$ donc $x \in \displaystyle\bigcap_{\beta \in \Phi} P_\beta \widehat{R} = H$.
$\supset$) Soit $x \in H$, et soit $\beta' \in \Phi'$. $\exists\ \beta \in \Phi$ tel que $\beta > \beta'$, (car Φ cofinal dans $\mathbb{R} \overset{\text{évident}}{\Longrightarrow} \Phi$ cofinal dans Φ'), et alors : $P'_\beta \widehat{R'} \subset P'_{\beta'} \widehat{R'}$, mais $x \in P_\beta \widehat{R} = P'_\beta \widehat{R'} \cap \widehat{R}$ et ceci pour tout $\beta' \in \Phi'$, donc $x \in \displaystyle\bigcap_{\beta' \in \Phi'} P'_{\beta'} \widehat{R'} \cap \widehat{R} = H' \cap \widehat{R}$.

<u>Remarque</u> : On a donc le diagramme (commutatif) suivant :

$$\begin{tikzcd}
R' \arrow[r, hook] & \widehat{R'} \arrow[r] & \widehat{R'}_{H'} \arrow[r] & \widehat{R'}_{N'} \\
R \arrow[r, hook] \arrow[u, hook, "\Pi"] & \widehat{R} \arrow[r] \arrow[u, "\widehat{\Pi}"] & \widehat{R}_H \arrow[r] \arrow[u] & \widehat{R}_N
\end{tikzcd}$$

Pour avoir une flèche : $\widehat{R}_N \longrightarrow \widehat{R'}_{N'}$, il suffirait que, comme pour H, on ait : $N' \cap \widehat{R} = N$, et pour cela il suffirait d'avoir la fidèle platitude de $\widehat{R'}$ sur $\overline{R}$, où : $\overline{R} = R' \underset{R}{\otimes} \widehat{R}$.

Or on a pas cette fidèle platitude, comme le prouve l'exemple suivant, donné par L. Gruson.

<u>Exemple 2</u> :

Soit : $R = k[u,v]_{(u,v)}$. R est local, nœthérien, G-anneau, (u, v sont des indéterminées).

Soit : $R' = k\Big[u, \dfrac{v}{u}\Big]_{(u)}$. On a : $R' = R\Big[\dfrac{v}{u}\Big]_{(u)}$, c'est l'anneau local du point générique du diviseur exceptionnel ($u = 0$) dans l'éclaté de R suivant son idéal maximal (u, v).

On a R' domine birationnellement R car $R \subset R\Big[\dfrac{v}{u}\Big] \subset \mathrm{Frac}R \ \Rightarrow \mathrm{Frac}R\Big[\dfrac{v}{u}\Big] = \mathrm{Frac}R$ et $\mathrm{Frac}R' = \mathrm{Frac}R = K$, de plus $R \hookrightarrow R'$ morphisme local : $(u,v) \subset (u)_{R'}$ car $v = u \times \dfrac{v}{u}$.

R' est aussi l'anneau de la valuation (u,v)-adique ν définie sur $K = k(u,v)$ i.e. :

$$k\Big[u, \frac{v}{u}\Big]_{(u)} = \left\{ \frac{P(u,v)}{Q(u,v)} \ \Big| \ \nu\big(P(u,v)\big) \geqslant \nu\big(Q(u,v)\big) \right\}.$$

Vérification : ν est définie sur $k[u,v]$ par : $\nu\big(P(u,v)\big) = \min\Big\{\alpha+\beta \ \Big| \ \alpha_{\alpha,\beta} \neq 0$ dans $P(u,v) = \sum\limits_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} u^\alpha v^\beta\Big\}$, (et se prolonge de facon unique à $k(u,v)$). ν est centrée en $k[u,v]$ et $k[u,v]_{(u,v)}$, de centres dans ces 2 anneaux : (u,v) (évident). Mais elle est aussi centrée en $k\Big[u, \dfrac{v}{u}\Big]$, de centre (u).

D'abord $k\Big[u, \dfrac{v}{u}\Big] \subset R_\nu$. En effet on peut écrire : $Q\Big(u, \dfrac{v}{u}\Big) = a_0(u) + a_1(u)\dfrac{v}{u} + \ldots + a_n(u)\Big(\dfrac{v}{u}\Big)^n$, et $Q\Big(u, \dfrac{v}{u}\Big) = \dfrac{Q_1(u,v)}{u^n}$ où $n = \deg_{\frac{v}{u}} Q$. Les monômes de $Q_1(u,v)$ sont les : $a_i(u)u^{n-i}v^i$, où $0 \leqslant i \leqslant n$, donc on voit que : $\nu\big(Q_1(u,v)\big) \geqslant n$ et donc $\nu\Big(Q\Big(u, \dfrac{v}{u}\Big)\Big) = \nu\big(Q_1(u,v)\big) - n\nu(u) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} \text{Maintenant : } Q\Big(u, \frac{v}{u}\Big) \in \mathcal{M}_\nu &\iff \nu\Big(Q\Big(u, \frac{v}{u}\Big)\Big) > 0 \\ &\iff \nu\big(Q_1(u,v)\big) > n \\ &\iff u \text{ divise dans } k[u] \text{ tous les } a_i(u) \\ &\iff u \text{ divise } Q\Big(u, \frac{v}{u}\Big) \text{ dans } k\Big[u, \frac{v}{u}\Big] \\ &\iff Q\Big(u, \frac{v}{u}\Big) \in (u) \text{ dans } k\Big[u, \frac{v}{u}\Big], \end{aligned}$$

et donc : $\mathcal{M}_\nu \cap k\Big[u, \dfrac{v}{u}\Big] = (u)$.

On sait alors que ν est centrée en $k\Big[u, \dfrac{v}{u}\Big]_{(u)}$, $\Big($de centre $(u)k\Big[u, \dfrac{v}{u}\Big]\Big)$.

Réciproquement soit $F(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ tel que : $\nu\big(P(u,v)\big) \geqslant \nu\big(Q(u,v)\big)$.

On a : $F(u,v) = \dfrac{u^\alpha P_1\Big(u, \frac{v}{u}\Big)}{u^\beta Q_1\Big(u, \frac{v}{u}\Big)}$, où $\begin{cases} \alpha = \nu\big(P(u,v)\big) \\ \beta = \nu\big(Q(u,v)\big), \ \alpha \geqslant \beta. \end{cases}$

Et on pas $Q_1\Big(u, \dfrac{v}{u}\Big)$ multiple de u dans $k\Big[u, \dfrac{v}{u}\Big]$ (sinon $\nu\big(Q(u,v)\big) > \beta$), cqfd .

Donc R' est anneau de valuation discrète, et son complété $\widehat{R'}$ l'est donc aussi (il est régulier, local, nœthérien, de dimension 1 comme R' et intègre car régulier local).

Si on avait $\overline{R} \longrightarrow \widehat{R'}$ fidèlement plat, alors les idéaux de $\overline{R}$ seraient totalement ordonnés par inclusion comme ceux de $\widehat{R'}$ mais $\overline{R}$ est intègre (voir description de $\overline{R}$ ci-après), et on aurait donc

$\overline{R}$ anneau de valuation, mais ce n'est pas le cas (cf. description $\overline{R}$).

Description de $\overline{R}$:

$\overline{R}$ est isomorphe à la partie (donc sous-anneau intègre) de $\mathrm{Frac}(\widehat{R}) = k((u,v))$ suivante :

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{f(u,v)}{Q(u,v)} \;\middle|\; f \in k[[u,v]], \quad Q \in k[u,v] \setminus \{0\} \text{ et } \nu(f) \geqslant \nu(Q) \right\},$$

où ν est la valuation (u,v)-adique de $k((u,v))$ qui prolonge bien sûr ν de $k(u,v)$.
En effet on considère l'application R-bilinéaire suivante (c'est un produit) :

$$\begin{array}{ccc} R' \times \widehat{R} & \longrightarrow & \mathrm{Frac}\widehat{R} \\ \Big(\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}, f(u,v)\Big) & \longrightarrow & \dfrac{P(u,v)f(u,v)}{Q(u,v)}, \end{array}$$

qui donne lieu à l'application R-linéaire :

$$\varphi : \overline{R} = R' \underset{R}{\otimes} \widehat{R} \longrightarrow \mathrm{Frac}\widehat{R}, \text{ telle que : } \varphi\Big(\frac{P(u,v)}{Q(u,v)} \otimes f(u,v)\Big) = \frac{P(u,v)f(u,v)}{Q(u,v)}.$$

φ est évidemment un morphisme d'anneaux, et son image est bien sûr incluse dans $\mathcal{R}$. On considère sa restriction (à l'arrivée) à $\mathcal{R}$. On obtient alors un isomorphisme :

$*$ **Injectivité** :

Soit $\displaystyle\sum_i \frac{P_i}{Q_i} \underset{R}{\otimes} f_i$ dans $\overline{R}$ tel que : $\displaystyle\varphi\Big(\sum_i \frac{P_i}{Q_i} \underset{R}{\otimes} f_i\Big) = 0$, i.e. : $\displaystyle\sum_i \frac{P_i f_i}{Q_i} = 0$. On a :

$$\sum_i \frac{P_i f_i}{Q_i} = 0 \implies \frac{\sum_i (\prod_{j\neq i} Q_j) P_i f_i}{\prod_i Q_i} = 0 \implies \sum_i (\prod_{j\neq i} Q_j) P_i f_i = 0 \implies 1 \underset{R}{\otimes} \sum_i (\prod_{j\neq i} Q_j) P_i f_i = 0$$

$$\implies \sum_i (\prod_{j\neq i} Q_j) P_i \underset{R}{\otimes} f_i = 0 \quad (\text{car } . \underset{R}{\otimes} . \text{ est } R\text{-bilinéaire et que } (\prod_{j\neq i} Q_j) P_i \in R)$$

$$\implies \sum_i \frac{P_i}{Q_i} \underset{R}{\otimes} f_i = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{on a multiplié par } \dfrac{1}{Q} \text{ où } Q = \displaystyle\prod_i Q_i \in R \text{ en utilisant l'isomorphisme :} \\ S^{-1}(R' \underset{R}{\otimes} \widehat{R}) \simeq S^{-1}R' \underset{R}{\otimes} \widehat{R} \text{ avec } S = R \setminus \{0\} . \end{array} \right)$$

$*$ **Surjectivité** : (on suppose ici k infini pour simplifier)

Soit $\dfrac{f(u,v)}{Q(u,v)} \in \mathcal{R}$. En faisant un changement linéaire de coordonnées du type : $\begin{cases} u' = u \\ v' = v - \alpha u, \end{cases}$
pour un $\alpha \in k$ choisi, on a u' et v' algébriquement indépendants sur k et on a : $Q(u,v) = Q_1(u',v')$, $f(u,v) = f_1(u',v')$ (en fait : $k[u,v] = k[u',v']$ et $k[[u,v]] = k[[u',v']]$), avec $Q_1(u',v')$ régulière (d'ordre p) en u' i.e. : $Q_1(u',0) = u'^p Q_2(u')$ où $Q_2(0) \neq 0$, (cf. lemme associé au théorème de division de Weierstrass , par exemple [Z.S.], lemma 3 p.147).
De plus : la valuation (u',v')-adique de $k((u',v'')) = k((u,v))$ n'est autre que ν (car $v' = v - \alpha u$ homogène de degré 1) et de même le degré **global** de Q_1 est égal à celui de Q.
On peut effectuer la division de Weierstrass de f_1 par Q_1 régulière :

$$f_1(u',v') = g_1(u',v')Q_1(u',v') + T_1(u',v') \ \text{ avec } T_1(u',v') \in k[[v']]\big[u'\big] \text{ et } \deg_{u'} T_1 < p$$
$$\text{et } g_1(u',v') \in k[[u',v']]$$

T_1 s'écrit : $T_1 = u'^{p-1}a_1(v') + \cdots + u'a_{p-1}(v') + a_p(v')$

On a : $\nu(T_1) = \min\limits_{0\leqslant i\leqslant p-1} \nu\big(u'^i a_{p-i}(v')\big)$ (car deux monômes contenant chacun une puissance de u' différente ne peuvent s'annuler entre eux).
D'où : $\forall\, i \in \{0,...,p-1\}$, $\nu\big(u'^i a_{p-i}(v')\big) \geqslant \nu(Q_1)$ sinon : $\exists\, i \in \{0,...,p-1\}$ tel que : $\nu(T_1) \leqslant \nu\big(u'^i a_{p-i}(v')\big) < \nu(Q_1) \leqslant \nu(g_1 Q_1)$ et alors $\nu(f_1) = \nu(T_1) < \nu(Q_1)$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\Big(\dfrac{f_1(u',v')}{Q_1(u',v')} \in \mathcal{R}\Big)$.
Donc on a : $\forall\, i \in \{0,...,p-i\}$, $u'^i b_{p-i}(v') = u'^i v'^{n_i} b_{p-i}(v')$, où $i + n_i \geqslant \nu(Q_1)$.

En revenant avec les paramètres u et v, on peut écrire :
$f(u,v) = g(u,v)Qu,v) + u^{p-1}(v-\alpha u)^{n_{p-1}}b_1(v-\alpha u) + \cdots + u(v-\alpha u)^{n_1}b_{p-1}(v-\alpha u) +$
$(v-\alpha u)^{n_0}b_p(v-\alpha u)$,

d'où : $\dfrac{f(u,v)}{Q(u,v)} = g(u,v) + \dfrac{\sum_{i=0}^{p-1} u^i v^{n_i} b_{p-i}(v-\alpha u)}{Q(u,v)}$

$= \varphi\Big(1 \underset{R}{\otimes} g(u,v) + \sum_{i=0}^{p-1} \dfrac{u^i v^{n_i}}{Q(u,v)} \underset{R}{\otimes} b_{p-i}(v-\alpha u)\Big)$, et on a l'antécédent cherché.

Maintenant $\overline{R}$ **n'est pas** un anneau de valuation :

On considère l'élément : $x = \dfrac{u - \sum_{i=1}^{+\infty} c_i v^i}{u^2} = \dfrac{w}{u^2}$, en reprenant la notation de l'exemple 1. Il est non nul et ni x, ni x^{-1} n'est dans $\overline{R}$: si $x = \dfrac{f}{Q} \in \mathcal{R}$, alors : $1 + \nu(Q) = 2 + \nu(f)$, avec $\nu(f) \geqslant \nu(Q)$, impossible, et si : $x^{-1} = \dfrac{u^2}{w} = \dfrac{f}{Q} \in \overline{R}$, alors : $Qu^2 \in H \cap R = (0)$, (cf. exemple 1), ce qui est bien sûr aussi impossible.

On revient maintenant au cadre général. Notons que si $f : A \to B$ est un morphisme (local) d'anneaux locaux nœthériens, on dit que B "induit" la topologie de A, si : $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \exists\ p \in \mathbb{N}$ tel que : $\mathcal{N}^p \cap A \subset \mathcal{M}^k$, où bien sûr $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ sont les maximaux respectifs de A et B. Dans ce cas f est injectif : $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \exists\ p \in \mathbb{N}$ tel que : $\ker f \subset \mathcal{N}^p \cap A \subset \mathcal{M}^k$, d'où : $\ker f \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}^k = (0)$.

Proposition 4 : $\quad \mathrm{ht}(H) \leqslant \mathrm{ht}(H')$.

démonstration :

On note $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ les maximaux de R et R', et $\overline{R} = R' \underset{R}{\otimes} \widehat{R}$ comme dans l'exemple précédent. Soit $I = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ l'idéal de R que l'on éclate, et $f \in I$ tel que $\nu(f) = \min \nu(I)$. Quitte à renuméroter les générateurs de I, on peut supposer que $f = f_0$.
Notons que $\overline{R}$ est nœthérien, en effet :

$$\begin{aligned}
\overline{R} &= \Big(R\big[\frac{f_1}{f}, \ldots, \frac{f_n}{f}\big]\Big)_P \underset{R}{\otimes} \widehat{R}, \quad \text{où } P \text{ est un premier de } R\big[\frac{f_1}{f}, \ldots, \frac{f_n}{f}\big], \\
&= \Big(U^{-1}R\big[\frac{f_1}{f}, \ldots, \frac{f_n}{f}\big]\Big) \underset{R}{\otimes} \widehat{R}, \quad \text{où } U = R\big[\frac{f_1}{f}, \ldots, \frac{f_n}{f}\big] \setminus P, \\
&\backsimeq U^{-1}\big(R\big[\frac{f_1}{f}, \frac{f_2}{f}, \ldots, \frac{f_n}{f}\big] \underset{R}{\otimes} \widehat{R}\big), \\
&\backsimeq U^{-1}\big(\widehat{R}\big[\frac{f_1}{f}, \ldots, \frac{f_n}{f}\big]\big),
\end{aligned}$$

est le localisé d'une $\widehat{R}$-algèbre de type fini, avec $\widehat{R}$ nœthérien.
On pose : $\overline{\mathcal{M}} = \widehat{\mathcal{M}'} \cap \overline{R}$, idéal premier de $\overline{R}$, et $\overline{S} = \overline{R} \setminus \overline{\mathcal{M}}$. Le morphisme $h : \overline{R} \to \widehat{R'}$ passe bien au localisé $\overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$, car si $x \in \overline{S}$, alors x inversible dans $\widehat{R'}$, i.e. $x \notin \widehat{\mathcal{M}'}$ (sinon $x \in \widehat{\mathcal{M}'} \cap \overline{R} = \overline{\mathcal{M}}$). De plus, le morphisme obtenu $\tilde{h} : \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}} \to \widehat{R'}$ est local, i.e. : $\tilde{h}\big(\overline{\mathcal{M}}\ \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}\big) \subset \widehat{\mathcal{M}'}$ (évident).
Par ailleurs le morphisme $g : R' \to \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$ composé des morphismes naturels : $R' \to \overline{R}$ et $\overline{R} \to \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$ est lui aussi local : si $m' \in \mathcal{M}'$, $g(m') = \dfrac{m' \otimes 1}{1} \in \overline{S}^{\ -1}\overline{\mathcal{M}}$ car $h(m' \otimes 1) = m' \in \widehat{\mathcal{M}'}$.
On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}} = \overline{S}^{\,-1}\,\overline{R} \arrow[dr, "\tilde{h}"] & \\
R' \arrow[ur, "g"] \arrow[r, hook] & \overline{R} = R' \underset{R}{\otimes} \widehat{R} \arrow[u] \arrow[r, "h"] & \widehat{R'} \\
R \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \widehat{R} \arrow[u, hook] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Notons que $R' \to \overline{R}$ est une injection car $\overline{R}$ est fidèlement plat sur R', et aussi que : $\widehat{R} \to \overline{R}$ est injective (il suffit pour le voir de tensoriser la suite exacte de R-modules : $0 \to R \to R'$ par $\widehat{R}$ fidèlement plat sur R).

On va d'abord démontrer que $\widehat{R'}$ est fidèlement plat sur $\overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$. Pour cela, il suffit de montrer que $\widehat{R'}$ est le complété de l'anneau local, nœthérien $\overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$, (cf.[M], th.8.14 p.62). Et pour cela encore, il suffit de vérifier que la topologie de $\widehat{R'}$ induit celle de $\overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$, et que celle $\overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$ induit celle de R', (théorème de topologie sur les complétés).

• Cas de $R' \to \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$:

Soit $k \in \mathbb{N}$. On cherche $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\overline{\mathcal{M}}^{\,p}\overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}} \cap R' \subset \mathcal{M}'^k$. On prend $p = k$. Soit alors $x \in R'$ tel que $g(x) \in \overline{S}^{\,-1}\overline{\mathcal{M}}^k$. On a $g(x) = \dfrac{u}{s}$, $u \in \overline{\mathcal{M}}^k = \big(h^{-1}(\widehat{\mathcal{M}'})\big)^k \subset h^{-1}(\widehat{\mathcal{M}'}^k)$ et donc : $\tilde{h}\big(g(x)\big) = \dfrac{h(u)}{h(s)} = h(u)h(s)^{-1} \in \widehat{\mathcal{M}'}^k$, i.e. $x \in \widehat{\mathcal{M}'}^k \cap R'$ et alors par fidèle platitude de $\widehat{R'}$ sur R', on a $x \in \mathcal{M}'^k$.

• Cas de $\overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}} \to \widehat{R'}$: Notons $\mathcal{M}' = (a_1, \dots, a_n)$, et donc $\widehat{\mathcal{M}'} = (a_1, \dots, a_n)\widehat{R'}$.

On va d'abord vérifier que : $(a_1 \underset{R}{\otimes} 1, \dots, a_n \underset{R}{\otimes} 1)$ forme un système de générateurs de $\overline{\mathcal{M}}$.

Soit $z = \sum_j r'_j \underset{R}{\otimes} \widehat{x_j} \in \overline{\mathcal{M}}$.

Supposons d'abord que pour un j, on ait : r'_j non inversible, i.e. $r'_j \in \mathcal{M}'$.

On écrit : $r'_j = \sum_i \lambda_{ij} a_i$, où les $\lambda_{ij} \in R'$, d'où : $r'_j \underset{R}{\otimes} \widehat{x_j} = \sum_i \lambda_{ij}\ a_i \underset{R}{\otimes} \widehat{x_j} = \sum_i (\lambda_{ij} \underset{R}{\otimes} 1)(a_i \underset{R}{\otimes} \widehat{x_j})$, mais on peut écrire : $\widehat{x_j} = x_j + \widehat{y_j}$, avec $x_j \in R$ et $\widehat{y_j} \in \mathcal{M}\widehat{R}$ (cf. la démonstration du lemme 3), d'où : $r'_j \underset{R}{\otimes} \widehat{x_j} = \sum_i (\lambda_{ij} \underset{R}{\otimes} x_j)(a_i \underset{R}{\otimes} 1) + \sum_i (\lambda_{ij} \underset{R}{\otimes} 1)(a_i \underset{R}{\otimes} \widehat{y_j})$ et comme on peut aussi écrire : $\widehat{y_j} = \sum_k m_k \widehat{u_k}$, $m_k \in \mathcal{M}$, $\widehat{u_k} \in \widehat{R}$, on a : $(\lambda_{ij} \underset{R}{\otimes} 1)(a_i \underset{R}{\otimes} \widehat{y_j}) = \sum_k (\lambda_{ij} m_k \underset{R}{\otimes} \widehat{u_k})(a_i \underset{R}{\otimes} 1)$, et donc $r'_j \underset{R}{\otimes} \widehat{x_j} \in (a_1 \underset{R}{\otimes} 1, \dots, a_n \underset{R}{\otimes} 1)$

Supposons maintenant que pour un (autre) j, on ait : r'_j inversible, i.e. $r'_j \in R' \setminus \mathcal{M}'$.

Écrivons encore : $\widehat{x_j} = x_j + \sum_k m_k \widehat{u_k}$, alors : $r'_j \underset{R}{\otimes} \widehat{x_j} = r'_j \underset{R}{\otimes} x_j + \sum_k (\widehat{(1 \underset{R}{\otimes} m_k u_k)}(r'_j \underset{R}{\otimes} 1)$. Mais $(1 \underset{R}{\otimes} m_k \widehat{u_k})(r'_j \underset{R}{\otimes} 1) = m_k r'_j \underset{R}{\otimes} \widehat{u_k}$, avec $m_k \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \Rightarrow m_k r'_j \in \mathcal{M}'$, donc tous ces termes de la somme correspondent au premier cas. Par ailleurs : $r'_j \underset{R}{\otimes} x_j = c_j \underset{R}{\otimes} 1$, avec $c_j = r'_j x_j \in R'$, et on est donc arrivé à l'écriture : $z = \sum_t \overline{r}_t\ .\ (a_t \underset{R}{\otimes} 1) + c \underset{R}{\otimes} 1$, avec $\overline{r}_t \in \overline{R}$; $c = \sum_j c_j \in R'$. D'après le premier cas, il ne reste plus qu'à montrer que $c \in \mathcal{M}'$, pour avoir $z \in (a_1 \underset{R}{\otimes} 1, \dots, a_n \underset{R}{\otimes} 1)$.

On a : $h(z) = \sum_t h(\overline{r}_t) h(a_t \underset{R}{\otimes} 1) + h(c \underset{R}{\otimes} 1) = \sum_t h(\overline{r}_t) a_t + c$, et par hypothèse $h(z) \in \widehat{\mathcal{M}'}$, donc $c \in \widehat{\mathcal{M}'} \cap R' = \mathcal{M}'$, par fidèle platitude de $\widehat{R'}$ sur R'.

On va maintenant vérifier que : $\forall\ p \in \mathbb{N},\ \ \widehat{\mathcal{M}'}^{p} \cap \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}} = \tilde{h}^{-1}\big(\widehat{\mathcal{M}'}\big) \subset \overline{S}^{\ -1}\overline{\mathcal{M}}^{p} = \overline{\mathcal{M}}^{p}\ \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$, ce qui prouvera le cas de : $\overline{R}_{\ \overline{\mathcal{M}}} \to \widehat{R'}$, (car c'est un morphisme local).
Soit $x \in \tilde{h}^{-1}\big(\widehat{\mathcal{M}'}^{p}\big),\ x = \dfrac{u}{s},\ u \in \overline{R},\ s \in \overline{S}$. Il suffit bien sûr de montrer que : $u \in \overline{\mathcal{M}}^{p}$.
Comme $(a_1, \ldots, a_n)$ est par définition un système de générateurs de $\mathcal{M}$, on peut écrire :
$u = \sum_{\vec{\ell}} \lambda_{\vec{\ell}}\ a_1^{\ell_1} \ldots a_n^{\ell_n} \underset{R}{\otimes} \widehat{x_{\vec{\ell}}}$, avec $\vec{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n$, (éventuellement tous nuls), $\lambda_{\vec{\ell}} \in R',\ \widehat{x_{\vec{\ell}}} \in \widehat{R}$.
On note : $|\vec{\ell}\,| = \ell_1 + \ldots + \ell_n$, qui va jouer un rôle de "compteur".
Comme précédemment, $\widehat{x_{\vec{\ell}}} = x_{\vec{\ell}} + \sum_k m_k \widehat{u_k}$, où $x_{\vec{\ell}} \in R$, $m_k \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$, $\widehat{u_k} \in \widehat{R}$, et on obtient :
$u = \sum_{\vec{\ell}} \lambda_{\vec{\ell}}\ x_{\vec{\ell}}\ a_1^{\ell_1} \ldots a_n^{\ell_n} \underset{R}{\otimes} 1 + \sum_{\vec{\ell},\ k} m_k \lambda_{\vec{\ell}}\ a_1^{\ell_1} \ldots a_n^{\ell_n} \underset{R}{\otimes} \widehat{u_k}$. Si $\lambda_{\vec{\ell}}\ x_{\vec{\ell}}$ est un élément de $\mathcal{M}'$, on le décompose suivant $a_1, \ldots, a_n$ et on fait augmenter la valeur de $|\vec{\ell}\,|$. De même on décompose $m_k \lambda_{\vec{\ell}}$ (qui est élément de $\mathcal{M}'$), suivant $a_1, \ldots, a_n$. Mais on peut aussi décomposer $\widehat{u_k}$, comme on l'a fait pour $\widehat{x_\ell}$, et répéter encore alors les mêmes décompositions. Quand on obtient $|\vec{\ell}\,| \geqslant p$, pour un terme, on arrête de le décomposer. Supposons que l'on ait pas pu obtenir pour tous les termes de la somme : $|\vec{\ell}\,| \geqslant p$, on a alors l'écriture de u suivante :
$u = \displaystyle\sum_{|\vec{\ell}\,|<p} \lambda'_{\vec{\ell}}\ a_1^{\ell_1} \ldots a_n^{\ell_n} \underset{R}{\otimes} 1 + \sum_{|\vec{\ell}\,| \geqslant p} \lambda'_{\vec{\ell}}\ a_1^{\ell_1} \ldots a_n^{\ell_n} \underset{R}{\otimes} \widehat{u'_{\vec{\ell}}}$, où pour $|\vec{\ell}\,| < p$, on a : $\lambda'_{\vec{\ell}} \in R' \setminus \mathcal{M}'$,
et pour $|\vec{\ell}\,| \geqslant p,\ \lambda'_{\vec{\ell}} \in R',\ \widehat{u'_{\vec{\ell}}} \in \widehat{R}$.
d'où : $h(u) = \displaystyle\sum_{|\vec{\ell}\,|<p} \lambda'_{\vec{\ell}}\ a_1^{\ell_1} \ldots a_n^{\ell_n}$ +élément de $\widehat{\mathcal{M}'}^{p}$, mais par hypothèse, $\tilde{h}(x) = h(u)h(s)^{-1} \in \widehat{\mathcal{M}'}^{p}$,
d'où aussi $h(u) \in \widehat{\mathcal{M}'}^{p}$, donc on a : $\displaystyle\sum_{|\vec{\ell}\,|<p} \lambda'_{\vec{\ell}}\ a_1^{\ell_1} \ldots a_n^{\ell_n} \in \widehat{\mathcal{M}'}^{p} \cap R' = \mathcal{M}'^{p}$, par fidèle platitude de $\widehat{R'}$ sur R', et on réécrit alors cet élément sous la forme : $\displaystyle\sum_{|\vec{m}|=p} \mu_{\vec{m}}\ a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}$, où les $\mu_{\vec{m}} \in R'$, et en le tensorisant sur R par 1, on voit que :

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{|\vec{m}|=p} \mu_{\vec{m}}\ a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} \underset{R}{\otimes} 1 + \sum_{|\vec{\ell}\,| \geqslant p} \lambda'_{\vec{\ell}}\ a_1^{\ell_1} \ldots a_n^{\ell_n} \underset{R}{\otimes} \widehat{u'_{\vec{\ell}}} \\
&= \sum_{|\vec{m}|=p} (\mu_{\vec{m}} \underset{R}{\otimes} 1)(a_1 \underset{R}{\otimes} 1)^{m_1} \ldots (a_n \underset{R}{\otimes} 1)^{m_n} + \sum_{|\vec{\ell}\,| \geqslant p} (\lambda'_{\vec{\ell}} \underset{R}{\otimes} \widehat{u'_{\vec{\ell}}})(a_1 \underset{R}{\otimes} 1)^{i_1} \ldots (a_n \underset{R}{\otimes} 1)^{i_n}\ ,
\end{aligned}
$$

est un élément de $\overline{\mathcal{M}}^{\ p}$, d'après ce que l'on a déjà vu sur les générateurs de $\overline{\mathcal{M}}$.

Comme on vient de prouver que $\widehat{R'}$ est fidèlement plat sur $\overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$, on sait que l'on a le "going-down theorem" entre ces deux anneaux, ([M], th.9.5 p.68), donc on a : $\mathrm{ht}(H') \geqslant \mathrm{ht}(H' \cap \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}})$.

On va maintenant prouver que : ht(H)=ht($\overline{H}$)=ht($\overline{H}\ \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$)=ht($H' \cap \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$), où : $\overline{H} = H' \cap \overline{R}$, ce qui concluera la démonstration.
La dernière égalité résulte du fait que : $H' \cap \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}} = \overline{H}\ \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$, en effet :
$\subset)$: Soit $\dfrac{a}{s},\ a \in \overline{R},\ s \in \overline{R} \setminus \overline{\mathcal{M}}$, tel que : $\tilde{h}\Big(\dfrac{a}{s}\Big) = h(a)h(s)^{-1} \in H'$, alors $h(a) \in H'$, et donc $a \in H' \cap \overline{R} = \overline{H}$, d'où : $\dfrac{a}{s} = \dfrac{a}{1} \times \dfrac{1}{s} \in \overline{H}\ \overline{R}_{\overline{\mathcal{M}}}$.
$\supset)$: Si $z = \dfrac{a}{s} \in \overline{S}^{\ -1}\overline{H}$, alors $\tilde{h}(z) = h(a)h(s)^{-1} \in H'$.
La deuxième égalité résulte du fait que : $\overline{H} \subset \overline{\mathcal{M}}$, (i.e. : $H' \cap \overline{R} \subset \widehat{\mathcal{M}'} \cap \overline{R}$), car alors la localisation en $\overline{\mathcal{M}}$ ne change pas la hauteur de l'idéal.
La première égalité est aussi : $\dim \widehat{R}_H = \dim \overline{R}_{\overline{H}}$, et on va montrer que : $\widehat{R}_H \backsimeq \overline{R}_{\overline{H}}$.
On pose : $T = \widehat{R} \setminus H$, $\overline{T} = \overline{R} \setminus \overline{H}$, $V = R \setminus \{0\}$, et $V' = R' \setminus \{0\}$.

On a : $V \subset T \subset \overline{T}$, car $H \cap R = (0)$, et $\overline{H} \cap \widehat{R} = H' \cap \overline{R} \cap \widehat{R} = H' \cap \widehat{R} = H$, et on a aussi : $V' \subset \overline{T}$ car $\overline{H} \cap R' = H' \cap R' = (0)$. On a le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{R}_{\overline{H}} = \overline{T}^{\,-1}\overline{R} & \rightleftarrows & \widehat{R}_H = T^{-1}\widehat{R} \\
\uparrow & & \uparrow \\
R' \underset{R}{\otimes} \widehat{R} = \overline{R} & \to & K \underset{R}{\otimes} \widehat{R} = V^{-1}\widehat{R}
\end{array}$$

Le seul point non immédiat est de définir le morphisme : $\overline{T}^{\,-1}\overline{R} \to T^{-1}\widehat{R}$ et de vérifier qu'il est bien l'inverse de : $T^{-1}\widehat{R} \to \overline{T}^{\,-1}\overline{R}$.
Le morphisme : $\varphi : \overline{R} \to T^{-1}\widehat{R} = \widehat{R}_H$ passe au localisé par $\overline{T}$, c'est à dire que si $t \in \overline{T} = \overline{R} \setminus \overline{H}$, alors $\varphi(t)$ est inversible dans $\widehat{R}_H$, i.e. n'est pas un élément de $H\widehat{R}_H$, car si c'était le cas, on aurait $\widehat{\Pi}_H\big(\varphi(t)\big) \in H'\widehat{R'}_H$, (en notant $\widehat{\Pi}_H : \widehat{R}_H \to \widehat{R'}_{H'}$), i.e. : $t \in H'\widehat{R'}_{H'} \cap \overline{R} = H'\widehat{R'}_{H'} \cap \widehat{R'} \cap \overline{R} = H' \cap \overline{R} = \overline{H}$, car on a (encore !) le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
V^{-1}\widehat{R} = K \underset{R}{\otimes} \widehat{R} & & \longrightarrow & & T^{-1}\widehat{R} = \widehat{R}_H \\
\Big\uparrow & & & & \Big\downarrow \\
\overline{R} = R' \underset{R}{\otimes} \widehat{R} & \longrightarrow & \widehat{R'} & \longrightarrow & \widehat{R'}_{H'}
\end{array}$$

En effet, soit $\overline{r} = \sum_i r'_i \underset{R}{\otimes} \widehat{r}_i \in \overline{R}$. On a : $\widehat{\Pi}_H\big(\varphi(\overline{r})\big) = \dfrac{\sum_i r'_i \widehat{r}_i}{1}$, qui est bien l'image de $\overline{r}$ quand on passe par le "bas" du diagramme, cqfd. Notons : $\tilde{\varphi} : \overline{R}_{\overline{H}} \to \widehat{R}_H$ et $\theta : \widehat{R}_H \to \overline{R}_{\overline{H}}$.
Il reste à vérifier que ces deux morphismes sont bien inverses l'un de l'autre. Soit $\dfrac{\widehat{r}}{\widehat{t}} \in \widehat{R}_H$, son image dans $\overline{R}_{\overline{H}}$ est $\dfrac{1 \underset{R}{\otimes} \widehat{r}}{1 \underset{R}{\otimes} \widehat{t}}$, et cette image est renvoyée sur $\dfrac{\widehat{r}}{\widehat{t}}$ dans $\widehat{R}_H$. Inversement il suffit de prouver qu'un élément $\overline{r}$ de $\overline{R}$ est renvoyé sur lui même dans $\overline{R}_{\overline{H}}$, i.e. $\theta\big(\varphi(\overline{r})\big) = \frac{\overline{r}}{1}$, car alors :
$\theta\big(\tilde{\varphi}(\frac{\overline{r}}{\overline{t}})\big) = \theta\big(\tilde{\varphi}(\overline{r})\tilde{\varphi}(\overline{t})^{-1}\big) = \theta\big(\tilde{\varphi}(\overline{r})\big)\theta\big(\varphi(\overline{t})\big)^{-1} = \frac{\overline{r}}{1} \times \big(\frac{\overline{t}}{1}\big)^{-1} = \frac{\overline{r}}{\overline{t}}$.
Un élément de $\overline{R}$ s'écrit comme une somme finie d'éléments du type :
$\overline{r}_i = \dfrac{\sum_{\vec{\ell}} a_{\vec{\ell}} \,(\frac{f_1}{f})^{\ell_1} \dots (\frac{f_n}{f})^{\ell_n}}{\sum_{\vec{m}} b_{\vec{m}} (\frac{f_1}{f})^{m_1} \dots (\frac{f_n}{f})^{m_n}} \underset{R}{\otimes} \widehat{r}$, ou encore, en effectuant les réductions au même dénominateur qui s'imposent : $\overline{r}_i = \frac{a/f^d}{b/f^m} \underset{R}{\otimes} \widehat{r}$. À nouveau, comme θ et $\tilde{\varphi}$ sont additives, il suffit de vérifier que $\overline{r}_i$ est renvoyé sur $\frac{\overline{r}_i}{1}$ dans $\overline{R}_{\overline{H}}$. On a : $\theta\big(\tilde{\varphi}(\overline{r}_i)\big) = \theta\big(\frac{af^m\widehat{r}}{bf^d}\big) = \dfrac{1 \underset{R}{\otimes} af^m\widehat{r}}{1 \underset{R}{\otimes} bf^d} = \dfrac{\frac{a}{f^d}\frac{f^m}{b} \underset{R}{\otimes} \widehat{r}}{1 \underset{R}{\otimes} 1} = \frac{\overline{r}_i}{1}$, dans $\overline{R}_{\overline{H}}$, comme on le constate en faisant simplement le produit en croix.

Remarque : Soit pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un éclatement local : $\Pi_n \;: R^{(n)} \hookrightarrow R^{(n+1)}$, en partant pour $n = 0$ de $\Pi \;: R \hookrightarrow R'$, et soit naturellement pour chaque n l'idéal implicite $H^{(n)}$ de $\widehat{R^{(n)}}$. Alors on peut affirmer que la suite : $\big(\mathrm{ht}(H^{(n)})\big)$ est stationnaire, en effet c'est une suite croissante d'entiers majorée par $\dim R$: $\quad \mathrm{ht} H^{(n)} \leqslant \dim \widehat{R^{(n)}} = \dim R^{(n)} \leqslant \dim R$,
(pour la dernière inégalité cf. [S], lemme 2.2, p.113).

Il se peut aussi que l'on ait l'inégalité stricte : $\mathrm{ht}(H) < \mathrm{ht}(H')$, comme le prouve l'exemple suivant :

Exemple 3 : (description de H et H')

On considère : $R = k[u,v,w]_{(u,v,w)}$ local, nœthérien, G-anneau, (avec u, v, w indéterminées), et $R' = k[u',v',w']_{u',v',w')}$, où : $\begin{cases} u' = u \\ v' = \frac{v}{u} \\ w' = w \end{cases}$

R' est l'éclatement de l'idéal (premier) (u, v) de R.

Notons que u', v', w' sont algébriquements indépendants sur k, que R' domine birationnellement R (tous deux de corps de fractions $K = k(u,v,w)$), et que $\Pi : R \hookrightarrow R'$ est l'unique morphisme (de k-algèbres) obtenu par passage au localisés à partir de : $\Pi_0 : k[u,v,w] \hookrightarrow k[u',v',w']$ tel que :

$\Pi_0(u) = u',\ \Pi_0(v) = u'v',\ \Pi_0(w) = w$ (Π_0 est l'injection canonique).

De plus : $\widehat{R} = k[[u,v,w]]$, et $\widehat{R'} = k[[u',v',w']]$, et ici $\widehat{\Pi} : \widehat{R} \longrightarrow \widehat{R'}$ est bien sûr injective. Enfin on a : $k = R'/(u',v',w') \backsimeq \widehat{R'}/(u',v',w')$ et aussi : $k = R/(u,v,w) \backsimeq \widehat{R}/(u,v,w)$.

Soient t_1, t_2 des indéterminées. On considère la valuation monomiale de $k((t_1,t_2))$, centrée en $k[[t_1,t_2]]$, soit θ, définie par : $\theta(t_1) = 1$, $\theta(t_2) = \sqrt{2}$.

Si $S = \sum_{\{p,q \in \mathbb{N}\}} a_{p,q} t_1^p t_2^q \in k[[t_1,t_2]]$, non nulle, alors : $\theta(S) = \min\{p + q\sqrt{2} \mid a_{p,q} \neq 0\}$.

Son groupe de valeurs est $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$, c'est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$, θ est de rang 1 (et de rang rationnel 2 : i.e. la dimension du $\mathbb{Z}$-module $\Gamma = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$).

On considère aussi l'unique morphisme de k-algèbres (local) $\tau : R' \longrightarrow k[[t_1,t_2]]$ défini par :

$\tau(u') = t_2$
$\tau(v') = t_1$
$\tau(w') = \sum_{i \geqslant 1} c_i t_1^i$, où les $c_i \in k^*$.

On suppose $\tau(w')$ transcendant sur $k(t_1)$. Alors τ est injective.

En effet, supposons : $\tau(\sum_{\text{finie}} a_{p,q,r} u'^p v'^q w'^r) = 0$, alors : $\sum_{\text{finie}} a_{p,q,r} t_2^p t_1^q (\sum_{i \geqslant 1} c_i t_1^i)^r = 0$, soit :

$$\sum_{q,r} a_{0,q,r} t_1^q (\sum_{i \geqslant 1} c_i t_1^i)^r + \Big(\sum_{q,r} a_{1,q,r} t_1^q (\sum_{i \geqslant 1} c_i t_1^i)^r\Big) t_2 + \cdots + \Big(\sum_{q,r} a_{p,q,r} t_1^q (\sum_{i \geqslant 1} c_i t_1^i)^r\Big) t_2^p = 0,$$

d'où tous les coefficients des $t_2^j,\ j \in \{0,...,p\}$, sont nuls, et par hypothèse $\sum_{i \geqslant 1} c_i t_1^i$ transcendant sur $k[t_1]$, donc tous les $a_{p,q,r}$ sont nuls, et τ est bien injective.

On note encore τ le prolongement de τ à K. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
k[u,v,w] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & k[u',v',w'] \arrow[d, hook] & \\
R \arrow[r, hook] & R' \arrow[r, hook, "\tau"] \arrow[d, hook] & k[[t_1,t_2]] \arrow[d, hook] \\
 & K \arrow[r, hook, "\tau"] & k((t_1,t_2))
\end{tikzcd}$$

On considère alors la valuation ν restriction de θ à K (via l'injection τ, analogue de l'exemple 1).

On a : $\nu(u') = \theta\big(\tau(u')\big) = \theta(t_2) = \sqrt{2}$
$\nu(v') = \theta\big(\tau(v')\big) = \theta(t_1) = 1$
$\nu(w') = \theta(\sum_{i\geqslant 1} c_i t_1^i) = 1$ (avec $c_1 \neq 0$).

De plus si $P/S \in R'$, $\nu(P/S) = \nu(P)$ car $\tau(S)$ de terme constant non nul, donc de valuation θ nulle. Donc ν est centrée en $k[u,v,w]$, R, $k[u',v',w']$ et R'. De plus son groupe de valeurs est celui de θ : $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$.
En effet, bien sûr : $\mathrm{Im}(\nu) \subset \Gamma$ et si $\gamma = p + q\sqrt{2} \in \Gamma$, soit $p, q \geqslant 0$, alors $\gamma = \nu(u'^q v'^p)$ $\big(= \nu(u^q w^p)\big)$, soit $p \geqslant 0, q < 0$, alors $\gamma = \nu\Big(\dfrac{v'^p}{u'^{-q}}\Big)$, soit $p < 0, q < 0$, et alors : $\gamma = \nu\Big(\dfrac{1}{u'^{-q} v'^{-p}}\Big)$.
On a donc ν de rang 1. Et on voit de même que : $\Phi' = \nu(R' \setminus \{0\}) = \mathbb{N} + \mathbb{N}\sqrt{2}$, et aussi : $\Phi = \nu(R \setminus \{0\}) = \mathbb{N} + \mathbb{N}\sqrt{2}$.

Soit $\beta \in \Phi'$ et $n = \max\{\ i \in \mathbb{N} \mid i < \beta\ \}$.

Alors : $P'_\beta = \{\ x \in R' \mid \nu(x) \geqslant \beta\ \} = \mathrm{Id}_{R'}\Big(\{w' - \sum_{i=1}^{n} c_i v'^i\ \} \cup \{\ u'^q v'^p \mid p + q\sqrt{2} \geqslant \beta\ \}\Big)$.
(idéal engendré dans R')

Vérification :

$\supset$) $\nu(u'^q v'^p) = p + q\sqrt{2}$ et $\nu(w' - \sum_{i=1}^{n} c_i v'^i) = \theta\Big(\tau(w') - \sum_{i=1}^{n} c_i \tau(v')^i\Big) = \theta\Big(\sum_{i\geqslant 1} c_i t_1^i - \sum_{i=1}^{n} c_i t_1^i\Big) =$
$\theta\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i t_1^i\Big) = n + 1 \geqslant \beta$ par définition de n.

$\subset$) Soit $P/S \in P_\beta \subset R'$. Comme déjà dit : $\nu(S) = 0$, donc : $\nu(P/S) \geqslant \beta \Leftrightarrow \nu(P) \geqslant \beta$.

La division euclidienne de P par $w' - \sum_{i=1}^{n} c_i v'^i$, polynôme unitaire de degré 1 dans $A[w']$, où $A = k[u', v']$, s'écrit : $P = \big(w' - \sum_{i=1}^{n} c_i v'^i\big) Q + T(u', v')$ car $\deg_{w'} T < 1$ (et $Q \in R'$).
Dans $T(u', v')$ tous les monômes $a_{p,q} u'^q v'^p$ sont de valuations distinctes, sinon on aurait pour deux monômes : $p_1 + q_1\sqrt{2} = p_2 + q_2\sqrt{2}$ avec $p_i, q_i \in \mathbb{N}$ pour $i = 1, 2$, mais $(1, \sqrt{2})$ base du $\mathbb{Z}$-module libre $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$, donc on aurait : $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$, contraire au fait que ce soient des monômes distincts.
Supposons maintenant que dans $T(u', v')$ on ait un monôme de valuation strictement inférieure à β, soit : $a_{p,q} u'^q v'^p$ **le** monôme qui soit de valuation la plus petite ainsi.

Alors : $\nu(P) = p + q\sqrt{2}$ $\Big($car $\nu\big((w' - \sum_{i=1}^{n} c_i v^i) Q\big) > \beta\Big)$
$< \beta$ contraire à l'hypothèse.

Donc tout monôme $a_{p,q} u'^q v'^p$ de $T(u', v')$ est de valuation supérieure ou égale à β et on a bien : $P/S \in \mathrm{Id}_{R'}\Big(\{w' - \sum_{i=1}^{n} c_i v'^i\ \} \cup \{u'^q v'^p \mid p + q\sqrt{2} \geqslant \beta\}\Big)$.

On va maintenant montrer : $H' = (h')$, où $h' = w' - \sum_{i=1}^{\infty} c_i v'^i \ \in\ \widehat{R'}$ et (rappel) : $H' = \bigcap_{\beta \in \Phi'} P'_\beta \widehat{R'}$.

- $h' \in H'$.

Soit $\beta \in \Phi'$. On définit $n \in \mathbb{N}$ comme précédemment, i.e. : $n = \max\{i \in \mathbb{N} \mid i < \beta\}$, alors : $h' = w' - \sum_{i=1}^{n} c_i v'^i - v'^{n+1} \times h_0$, où $h_0 = c_{n+1} + c_{n+2} v' + \cdots = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i v'^{i-(n+1)} \in \widehat{R'}$.

Comme $n+1 \geqslant \beta$, on a : $v'^{n+1} \in \{u'^q v'^p \mid p+q\sqrt{2} \geqslant \beta\}$, (prendre $q=0$, $p=n+1$), et on a donc $h' \in P'_\beta \widehat{R'}$ comme on voulait.

- Si on a h' irréductible dans $\widehat{R'}$, comme $\widehat{R'}$ est factoriel, on a (h') premier de $\widehat{R'}$, et si on montre H' de hauteur 1, on aura : $H' = (h')$.

La démonstration de l'irréductibilité de h' est la même que celle de w de l'exemple 1. D'ailleurs h' est un paramètre de $\widehat{R'}$ i.e. : (u', v', h') système régulier de paramètres de $\widehat{R'} = k[[u', v', w']]$, $\big($car h' d'ordre 1 (pour la valuation (u', v', w')-adique de $\widehat{R'}$) et les formes initiales $\overline{u'}, \overline{v'}, \overline{h'} = \overline{w'} - c_1\overline{v'}$, sont linéairement indépendantes sur $k\big)$, et on sait alors ([A],cor.11.21 p.123) que u', v', h' sont algébriquement indépendants sur k, d'où $k[u', v', w'] \backsimeq k[u', v', h']$ et h' irréductible.

Pour démontrer $\mathrm{ht}(H) = 1$, il suffit de montrer : $\dim \widehat{R'}/H' \geqslant 2$,

(car $\dim\Big(\widehat{R'}/H'\Big) + \dim\big(\widehat{R'}_{H'}\big) \leqslant \dim \widehat{R'}$ et $\dim \widehat{R'} = 3$ et $\mathrm{ht}(H') \neq 0$).

On considère $u', v' \in \widehat{R'}/H'$ non nuls. (Rappelons que : $R' \subset \widehat{R'}/H'$ car $H' \cap R' = (0)$).

Il suffit de vérifier que : $(0) \subsetneq (v') \subsetneq (u', v')$ est une chaîne de premiers de $\widehat{R'}/H'$.

$\widehat{R'}/H'$ est intègre, donc (0) est premier.

Vérifions (v') premier dans $\widehat{R'}/H'$.

Raisonnons par l'absurde . Supposons : $\widetilde{f_1}\widetilde{f_2} \in (v')$ avec $\widetilde{f_1} \notin (v')$, $\widetilde{f_2} \notin (v')$, (pour des $f_1, f_2 \in \widehat{R'}$).

Comme la forme initiale de h' est homogène de degré 1 en $\overline{u'}, \overline{v'}, \overline{w'}$ on a en fait :

$$k[[u', v', w']] = k[[u', v', h']] \qquad \text{([Z.S.], lemmes 1 et 2 p.134-136).}$$

Par ailleurs $\varphi : \widehat{R'} \longrightarrow \widehat{R'}/H'$ est un morphisme continu, (la topologie quotient est définie pour ça), mais la topologie quotient de $\widehat{R'}/H'$ n'est autre que la topologie linéaire associée à $\Big(\varphi(\mathcal{M}'^n \widehat{R'})\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ i.e. la topologie $\Big(\mathcal{M}' \widehat{R'}/H'\Big)$-adique de $\widehat{R'}/H'$, et comme ce dernier est (local) nœthérien, sa topologie est métrisable, (car filtration séparée), et de plus c'est un anneau topologique ([M.P.], prop.2.7 p.144). Donc quand on écrit f_1 dans $k[[u', v', h']]$, $f_1 = \sum_{p,q,r} u'^p v'^q h'^r$, on obtient :

$$\widetilde{f_1} = \sum_{p,q} a_{p,q} u'^p v'^q \quad ,$$

grâce à la continuité de φ,
cette écriture ayant bien un sens dans $\widehat{R'}/H'$
d'aprés le commentaire précédent.

Maintenant : $\widetilde{f_1} \in (v') \iff \{$ tous les monômes de $\widetilde{f_1}$ sont multiples de v' $\}$,

(car justement $\widehat{R'}/H'$ est anneau topologique, on a les opérations sur les limites).

Donc finalement on écrit :

$$\widetilde{f_1} = a u'^{n_1} + \sum_{q \geqslant 1, p \geqslant 0} a_{p,q} u'^p v'^q,$$

$$\widetilde{f_2} = b u'^{n_2} + \sum_{q \geqslant 1, p \geqslant 0} b_{p,q} u'^p v'^q, \text{ avec } n_1, n_2 \in \mathbb{N}^* \text{ et } a, b \in k^*.$$

Par ailleurs on a : $\widetilde{f_1}\widetilde{f_2} \in (v')$, donc on obtient une égalité : $\displaystyle\sum_{q \geqslant 1, p \geqslant 0} c_{p,q} u'^p v'^q = abu'^n$ dans $\widehat{R'}/H'$, avec $n = n_1 + n_2$. Soit $\hat{\nu}$ la valuation centrée en $\widehat{R'}/H'$, prolongeant ν.

Notons $S = \displaystyle\sum_{q \geqslant 1, p \geqslant 0} c_{p,q} u'^p v'^q$ série formelle de $\widehat{R'}/H'$ et S_0 la “même” série, vue dans $\widehat{R}'$.

On a bien sûr : $S = \varphi(S_0)$, (par continuité de φ). On va montrer que : $\hat{\nu}(S) \neq \hat{\nu}(abu'^n)\big(= n\sqrt{2}\big)$.

On a $S_0 \notin H'$ (donc $S_0 \neq 0$), sinon $S = 0$ et on a une contradiction immédiate : $+\infty = n\sqrt{2}$.

Dans la série S (ou S_0) on regarde : $\{q+p\sqrt{2} \mid c_{p,q} \neq 0\ ;\ p,q \text{ indices sommation } (q \geqslant 1)\} \neq \emptyset$.
Cet ensemble admet un plus petit élément (c'est une partie de Φ' bien ordonné), soit : $\alpha = q_0 + p_0\sqrt{2}$, $\big(p_0, q_0$ uniques définis par ce plus petit élément : $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est $\mathbb{Z}$-module libre de base $(1,\sqrt{2})\big)$.
Pour la même raison tous les autres $q+p\sqrt{2}$ sont distincts et strictement supérieurs à α.

On a donc : $S_0 = c_{p_0,q_0} u'^{p_0} v'^{q_0} + \displaystyle\sum_{\{p,q \ \mid\ q+p\sqrt{2}\ >\alpha\}} c_{p,q} u'^p v'^q$.

Si α_1 dénote l'élément de Φ' immédiatement supérieur à α, on sait que : $P'_{\alpha_1} = P'^{+}_{\alpha}$, et d'après la description vue de P'_{α_1} tous les $c_{p,q}u'^p v'^q$, $q+p\sqrt{2} > \alpha$, sont dans P'_{α_1} donc dans : $P'_{\alpha_1}\widehat{R'}$ et donc la série : $\displaystyle\sum_{\{p,q \mid q+p\sqrt{2}\ >\alpha\}} c_{p,q}u'^p v'^q$ de $\widehat{R'}$ aussi puisque $P'_{\alpha_1}\widehat{R'}$ idéal fermé de $\widehat{R'}$.

Par ailleurs : $c_{p_0,q_0}u'^{p_0}v'^{q_0}$ est un élément de R' de ν-valuation $q_0+p_0\sqrt{2}$ (i.e. élément de $P_\alpha \setminus P^+_\alpha$).
D'après la définition de $\hat{\nu}$, on a donc : $\hat{\nu}(S) = q_0+p_0\sqrt{2}$, et donc on devrait avoir : $q_0+p_0\sqrt{2} = n\sqrt{2}$, avec $q_0 \geqslant 1$, c'est impossible.

Vérifions maintenant $(v') \neq (u',v')$, i.e. bien sûr : $u' \notin (v')$.
Si $u' \in (v')$, alors $u' = v'\widetilde{r}'$ avec $r' \in \widehat{R'}$, d'où : $\sqrt{2} = \hat{\nu}(u') = \hat{\nu}(v'\widetilde{r}') = 1+p+q\sqrt{2}$, avec $p,q \in \mathbb{N}$, (car : $\hat{\nu}\big(\widehat{R'}/H'\big) = \Phi'$), impossible.

Enfin vérifions que (u',v') est un premier de $\widehat{R'}/H'$. Comme précédemment on suppose :
$\widetilde{f}_1\widetilde{f}_2 \in (u',v')$, avec $\widetilde{f}_1 \notin (u',v')$, $\widetilde{f}_2 \notin (u',v')$. Ici nécessairement on a :

$$\widetilde{f}_1 = a + \sum_{(p,q)\neq(0,0)} a_{p,q}u'^p v'^q,$$

$$\widetilde{f}_2 = b + \sum_{(p,q)\neq(0,0)} b_{p,q}u'^p v'^q, \text{ avec } \ a,b \in k^*,$$

d'où : $\widetilde{f}_1\widetilde{f}_2 = ab + \displaystyle\sum_{(p,q)\neq(0,0)} d_{p,q}u'^p v'^q$, qui ne peut pas être dans (u',v'), sinon :

$ab = \displaystyle\sum_{(p,q)\neq(0,0)} e_{p,q}u'^p v'^q$ dans $\widehat{R'}/H'$, et alors : $0 = \hat{\nu}(ab) = p+q\sqrt{2}$ avec $(p,q) \neq (0,0)$.

Déterminons enfin H. On a vu : $H = H' \cap \widehat{R}$, i.e. : $H = \widehat{\Pi}^{-1}(H')$, avec ici le morphisme $\widehat{R} \xrightarrow{\widehat{\Pi}} \widehat{R'}$ défini par : $\widehat{\Pi}\Big(\displaystyle\sum_{p,q,r} a_{p,q,r}u^p v^q w^r\Big) = \displaystyle\sum_{p,q,r} a_{p,q,r}u'^{p+q}v'^q w'^r$, (car $\widehat{\Pi}$ continu et prolonge Π), qui est ici bien sûr injectif.
Soit $x \in H$, on a : $x = \displaystyle\sum_{p,q,r} a_{p,q,r}u^p v^q w^r$ et $\widehat{\Pi}(x) = h' \,.\, S'$ avec $S' \in \widehat{R'}$.

Si $S' = 0$, comme $\widehat{\Pi}$ est injectif, on a $x = 0$.
Sinon soit n la valuation (u',v',w')-adique de S', $n \in \mathbb{N}$, et soit $S'_n = b_{l,q,r}u'^l v'^q w'^r$ le monôme de degré (le plus bas : $n = l+q+r$) de S'.

$$h'S'_n = (w' - \sum_{i\geqslant 1} c_i v'^i)S'_n = \underbrace{b_{l,q,r}u'^l v'^q w'^{r+1} - c_1 b_{l,q,r}u'^l v'^{q+1}w'^r}_{\text{de degré la valuation } (u',v',w')\text{-adique de } h'S'} + \sum_{i\geqslant 2} c_i b_{l,q,r}u'^l v'^{i+q}w'^r,$$

Comme : $h'S' = \widehat{\Pi}(x) \in \mathrm{Im}(\widehat{\Pi})$, on devrait avoir :

$$\begin{cases} l = p+q \\ l = p+q+1 \text{ où } p \in \mathbb{N}, \text{ ce qui est bien sûr impossible.} \end{cases}$$

Donc on a : $H = (0)$ et $\mathrm{ht}(H) = 0$, et on a trouvé un exemple pour lequel : $\begin{array}{l} H \subsetneq H' \\ \mathrm{ht}(H)\ < \mathrm{ht}(H'). \end{array}$

Bibliographie :

[A] : Atiyah Mac-Donald, Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, 1969.

[E] : David Eisenbud, Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1995.

[M] : Hideyuki Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge studies in advanced mathematics 8, édition 86.

[M.P.] : Marie-Paule Malliavin, Algèbre commutative, applications en géométrie et théorie des nombres, collection Maîtrise de mathématiques pures, Masson, 1984.

[S] : Mark Spivakovsky, Valuations in functions fields of surfaces, American Journal of Mathematics (1990)

[Z.S.] : Oscar Zariski-Pierre Samuel, Commutative Algebra, volume II, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1960.